



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA
DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

AJUSTAMENTO II – GA110

Prof. Alvaro Muriel Lima Machado

1



Ajustamento de Observações

Quando as medidas não são feitas diretamente sobre as grandezas procuradas, mas sim sobre outras relacionadas matematicamente...

Método paramétrico → $L_a = F(X_a)$
Os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados.

Método dos correlatos → $F(L_a) = 0$
Os valores observados ajustados devem satisfazer determinadas condições (erro de fechamento = zero).

Método combinado → $F(L_a, X_a) = 0$
Os valores observados ajustados e os parâmetros ajustados são ligados por função não explícita (não se consegue separá-los).

2



Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Não existe relacionamento entre as observações de até dois ângulos de um triângulo. Na observação dos três ângulos, porém, existe uma condição a ser considerada.

$$A + B + C - 180 = 0 \quad \text{ou} \quad F(L_a) = 0$$

$$L_a = L_b + V$$

$$F(L_a) = F(L_b + V) \cong F(L_b) + \left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b} (L_a - L_b) = 0$$

$$\text{Erro de fechamento} = W = F(L_b) \quad B = \left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b}$$

$$r B_{nn} V_1 + r W_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} r = \text{equações de condição} \\ n = \text{observações} \end{array}$$

3

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Técnica Lagrangiana $\rightarrow \phi = V^T P V - 2K^T (B V + W) = \text{mínimo}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = 2P V - 2B^T K = 0 \qquad \frac{\partial \phi}{\partial K} = -2(BV + W) = 0$$

$$P V - B^T K = 0 \qquad B V + W = 0$$

$${}_n P_{nn} V_1 - {}_n B_{nr}^T K_1 = 0 \qquad {}_r B_{nr} V_1 + W_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} P & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ -K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

$$P V - B^T K = 0 \qquad \rightarrow \qquad V = P^{-1} B^T K$$

$$B V + W = 0 \qquad \rightarrow \qquad B(P^{-1} B^T K) + W = 0$$

$$K = -(B P^{-1} B^T)^{-1} W$$

Fazendo-se $M = B P^{-1} B^T$

$$K = -M^{-1} W$$

5

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

a) Valores observados ajustados

$$V = P^{-1} B^T K$$

$$L_a = L_b + V$$

b) MVC dos valores ajustados

$$\sum_{L_a} = \sum_{L_b} (I - B^T M^{-1} B P^{-1})$$

c) MVC dos Resíduos

$$\sum_V = -\sigma_0^2 P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1}$$

ou $\rightarrow \sum_{L_a} = \sum_{L_b} + \sum_V$

d) Variância da observação (de peso unitário) a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{S} = \frac{-K^T W}{r}$$

6

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

- 1) L_b
- 2) P
- 3) $W = F(L_b)$
- 4) $B \rightarrow B = \left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b}$
- 5) $M = BP^{-1}B^T$
- 6) $K = -M^{-1}W$
- 7) $V = P^{-1}B^T K$
- 8) $L_a = L_b + V$
- 9) $\hat{\sigma}_0^2 \rightarrow \hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r} = \frac{-K^T W}{r}$
- 10) $\Sigma_{L_a} = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1} (I - B^T M^{-1} B P^{-1})$

7

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Com iterações

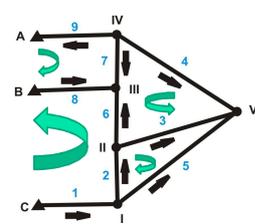
- 1) L_b
- 2) P
- 3) $W = F(L_b)$
- 4) B
- 5) $M = BP^{-1}B^T$
- 6) $K = -M^{-1}W$
- 7) $V = P^{-1}B^T K$
- 8) $L_a = L_b + V$
- 9) $\hat{\sigma}_0^2$
- 10) $\Sigma_{L_a} = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1} (I - B^T M^{-1} B P^{-1})$

$L_i = L_a$
 $B_i = \left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_i}$
 $W_i = B_i(L_b - L_i) + F(L_i)$
 $M_i; K_i; V_i$
 $L_i^a = L_b + V_i$

8

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Ajustamento de uma rede de nivelamento geométrico
 - Pesos inversamente proporcionais ao comprimento das linhas



Linha	Desnível (m)	Distância (km)
1	10,038	1,14
2	8,297	2,84
3	1,949	3,21
4	5,217	6,03
5	10,244	6,75
6	1,562	0,84
7	4,837	2,94
8	3,370	2,01
9	15,979	5,28

Altitudes conhecidas
 $H_A = 33,831\text{m}; H_B = 19,316\text{m}; H_C = 2,791\text{m}$

9

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

1) Equações de condição

Observações = 9 (desníveis medidos)

Incógnitas = 5 (altitudes das cinco estações novas)

Equações de condição = $r = 9 - 5 = 4$ (graus de liberdade)

Dentre as várias possibilidades...

$$\begin{cases} l_{1a} + l_{2a} + l_{6a} - l_{8a} - (h_B - h_C) = 0 \\ -l_{9a} + l_{7a} - l_{8a} - (h_B - h_A) = 0 \\ l_{2a} + l_{3a} - l_{5a} = 0 \\ l_{3a} - l_{4a} + l_{7a} - l_{6a} = 0 \end{cases}$$

10

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

As equações de condição podem ser reescritas...
(usando-se a primeira equação como exemplo):

$$l_{1a} + l_{2a} + l_{6a} - l_{8a} - (h_B - h_C) = 0$$

$$l_{1b} + v_1 + l_{2b} + v_2 + l_{6b} + v_6 - (l_{8b} + v_8) - (h_B - h_C) = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_6 - v_8 + [l_{1b} + l_{2b} + l_{6b} - l_{8b} - (h_B - h_C)] = 0$$

Fazendo-se o mesmo com todas as equações...

$$BV + W = 0 \rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 + v_6 - v_8 + w_1 = 0 \\ -v_9 + v_7 - v_8 + w_2 = 0 \\ v_2 + v_3 - v_5 + w_3 = 0 \\ v_3 - v_4 + v_7 - v_6 + w_4 = 0 \end{cases}$$

11

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

O modelo sendo linear, os coeficientes dos resíduos já representam as derivadas parciais, resultando:

Resíduos → 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Equação 1} \\ \text{Equação 2} \\ \text{Equação 3} \\ \text{Equação 4} \end{matrix}$$

12

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Vetor Erro de Fechamento

$$W = F(L_b) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1b} + l_{2b} + l_{6b} - l_{8b} - (h_B - h_C) \\ -l_{9b} + l_{7b} - l_{8b} - (h_B - h_A) \\ l_{2b} + l_{3b} - l_{5b} \\ l_{3b} - l_{4b} + l_{7b} - l_{6b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} (mm)$$

13

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Equações Normais

$MK + W = 0 \rightarrow K = -M^{-1}W$ com $M = BP^{-1}B^T$

Matriz dos Pesos

14

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

$M = BP^{-1}B^T =$

$K = -M^{-1}W =$

15

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Cálculo do Vetor dos Resíduos Desníveis ajustados

$V = P^{-1}B^T K =$ $L_a = L_o + V =$

16

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Altitudes

17

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Variância da unidade de peso a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r} = \frac{-K^T W}{r}$$

18

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

A medida de uma pequena base conduziu ao valor: $l_{1b} = 201,71m$
 Numa segunda experiência, a base foi decomposta em duas e ambas medidas com o seguinte resultado: $l_{2b} = 75,81m$; $l_{3b} = 125,22m$
 Na terceira experiência, idêntica à segunda, obteve-se:
 $l_{4b} = 100,03m$; $l_{5b} = 100,76m$

Calcular x_{1b} , x_{2b} e x_{3b}

19

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

1) Equações de condição
 Observações = 5 (distâncias medidas)
 Incógnitas = 3 (comprimentos totais)
 Equações de condição = $r = 5 - 3 = 2$ (graus de liberdade)

Passando às transformadas:

20

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Matriz B do modelo $BV + W = 0$

2) Cálculo dos correlatos

$$M = BP^{-1}B^T =$$

$$K = -M^{-1}W =$$

21

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

3) Valores observados ajustados

$$V = P^{-1} B^T K =$$

$$L_a = L_o + V =$$

22

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Ajustar a rede vertical (nivelamento geométrico) mostrada no esquema e no quadro que se seguem.
Obs.: Usar pesos inversamente proporcionais ao comprimento das linhas.

23

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

LINHA	DESNÍVEL	COMP.	
Nº	PONTOS	(m)	(km)
01	B-A	106,2625	72
02	B-A	106,2602	40
03	B-C	175,9286	44
04	C-D	4,0472	20
05	A-D	73,6905	61
06	E-C	36,3277	26
07	E-F	29,9320	59
08	F-D	10,4241	60

LINHA	DESNÍVEL	COMP.	
Nº	PONTOS	(m)	(km)
09	G-E	138,6889	83
10	G-H	181,0665	26
11	F-H	12,4700	74
12	G-I	162,2300	248
13	I-J	23,8215	111
14	H-J	5,0135	67
15	I-K	22,8896	108
16	K-J	0,9243	147

24

 Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

1) Equações de condição
Observações = 16
Incógnitas = 10 (cotas desconhecidas)
Equações de condição = $r = 16 - 10 = 6$ (graus de liberdade)

25

 Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

2) Vetor B

3) Vetor W

26

 Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

4) Vetor Peso P

27

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

No FreeMat...

28

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

5) Vetor M

$$M = BP^{-1}B^T =$$

6) Vetor dos Correlatos K

$$K = -M^{-1}W =$$

29

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

7) Vetor dos Resíduos V

$$V = P^{-1}B^TK =$$

30

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

8) Vetor das Observações Ajustadas L_a

$$L_a = L_b + V =$$

31

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

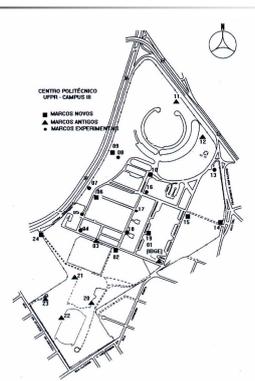
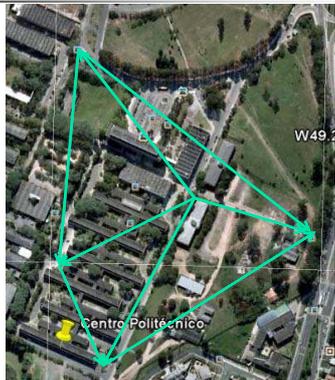


Figura 1 – Rede Alométrica Científica do Centro Politécnico

32

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos



33

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Desníveis Observados (m)	Distâncias (m)
3,3166	386,26
6,1492	276,93
2,6433	247,93
9,1355	511,28
0,3311	302,71
3,5052	274,58
3,1796	313,43
9,4762	181,31

34

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

1) Equações de condição
 Observações = 8
 Incógnitas = 4 (altitudes desconhecidas)
 Equações de condição = $r = 8 - 4 = 4$ (graus de liberdade)

35

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

2) Vetor B

3) Vetor W

36

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

4) Vetor Peso P

37

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

No FreeMat...

38

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

5) Vetor M

$$M = BP^{-1}B^T =$$

6) Vetor dos Correlatos K

$$K = -M^{-1}W =$$

39

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

7) Vetor dos Resíduos V

$$V = P^{-1}B^TK =$$

40

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

8) Vetor das Observações Ajustadas L_a

$$L_a = L_b + V =$$

9) Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r}$$

41

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Cálculo das altitudes dos pontos → RN = 914,3259m

42

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Cálculo da precisão dos valores observados ajustados

$$\sum L_u = \sum L_b (I - B^T M^{-1} B P^{-1})$$

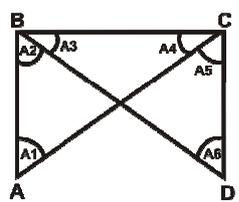
43

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Cálculo da precisão dos valores observados

44

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos



Ângulos	Observações	Peso
A1	44°50'44"	1
A2	46°10'25"	3
A3	45°55'12"	3
A4	43°04'03"	3
A5	48°32'45"	3
A6	42°27'42"	1

Determinar os ângulos A, B, C e D.

45

 Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

1) Equações de condição
Observações = 6
Incógnitas = 4 (ângulos desconhecidos)
Equações de condição = $r = 6 - 4 = 2$ (graus de liberdade)

46

 Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

2) Vetor B

3) Vetor W

47

 Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

4) Vetor Peso P

48

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

No FreeMat...

49

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

5) Vetor M

$$M = BP^{-1}B^T =$$

6) Vetor dos Correlatos K

$$K = -M^{-1}W =$$

50

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

7) Vetor dos Resíduos V

$$V = P^{-1}B^T K =$$

51

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

8) Vetor das Observações Ajustadas L_a

$$L_a = L_o + V =$$

9) Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r}$$

52

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

10) MVC das Observações Ajustadas

$$\sum_{L_a} = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1} (I - B^T M^{-1} B P^{-1})$$

53

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

11) Ângulos ajustados

$$\hat{A} = A_{1a} =$$

$$\hat{B} = A_{2a} + A_{3a} =$$

$$\hat{C} = A_{4a} + A_{5a} =$$

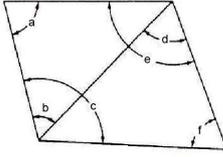
$$\hat{D} = A_{6a} =$$

54

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

Os ângulos apresentados na figura abaixo, com observações e pesos disponíveis na tabela, foram medidos com uma estação total. Use MMQ para ajustá-los.

Ângulo	Observação	Peso
a	70°14'30"	1
b	62°27'14"	2
c	103°38'26"	2
d	61°52'04"	1
e	109°10'04"	1
f	76°56'36"	1



2 graus de liberdade

55

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

1) Equações de condição
 Observações = 6
 Incógnitas = 4 (ângulos desconhecidos)
 Equações de condição = $r = 6 - 4 = 2$ (graus de liberdade)

56

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

2) Vetor B

3) Vetor W

57

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

4) Vetor Peso P

58

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

No FreeMat...

59

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

5) Vetor M

$$M = BP^{-1}B^T =$$

6) Vetor dos Correlatos K

$$K = -M^{-1}W =$$

60

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

7) Vetor dos Resíduos V

$$V = P^{-1}B^T K =$$

61

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

8) Vetor das Observações Ajustadas L_a

$$L_a = L_o + V =$$

9) Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r}$$

62

Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

10) MVC das Observações Ajustadas

$$\sum_{L_a} = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1} (I - B^T M^{-1} B P^{-1})$$

63



Método das Equações de Condição ou dos Correlatos

64
