

# MECÂNICA E ESTRUTURAS GEODÉSICAS II

DR. CARLOS AURÉLIO NADAL

Professor Titular

## UNIDADES DE MEDIDAS UTILIZADAS

N = Newton é uma unidade de medida de força, denominada em homenagem a Isaac Newton. Corresponde à força exercida sobre um corpo de massa igual a 1 kg e induz uma aceleração de  $1 \text{ m/s}^2$  na mesma direção e sentido da força.

$$1\text{N} = \text{kg.m/s}^2$$

Pa = **Pascal** é a unidade de pressão e tensão no SI. Equivale a força de 1 N aplicada uniformemente sobre uma superfície de  $1 \text{ m}^2$ .

1 <u>milibar</u>	100 Pa
1 <u>atmosfera</u>	101 325 Pa
1 <u>mmHg</u> (ou <u>Torr</u> )	133,322 Pa

# ESTRUTURA DE CONCRETO ARMADO PRÉ-FABRICADO





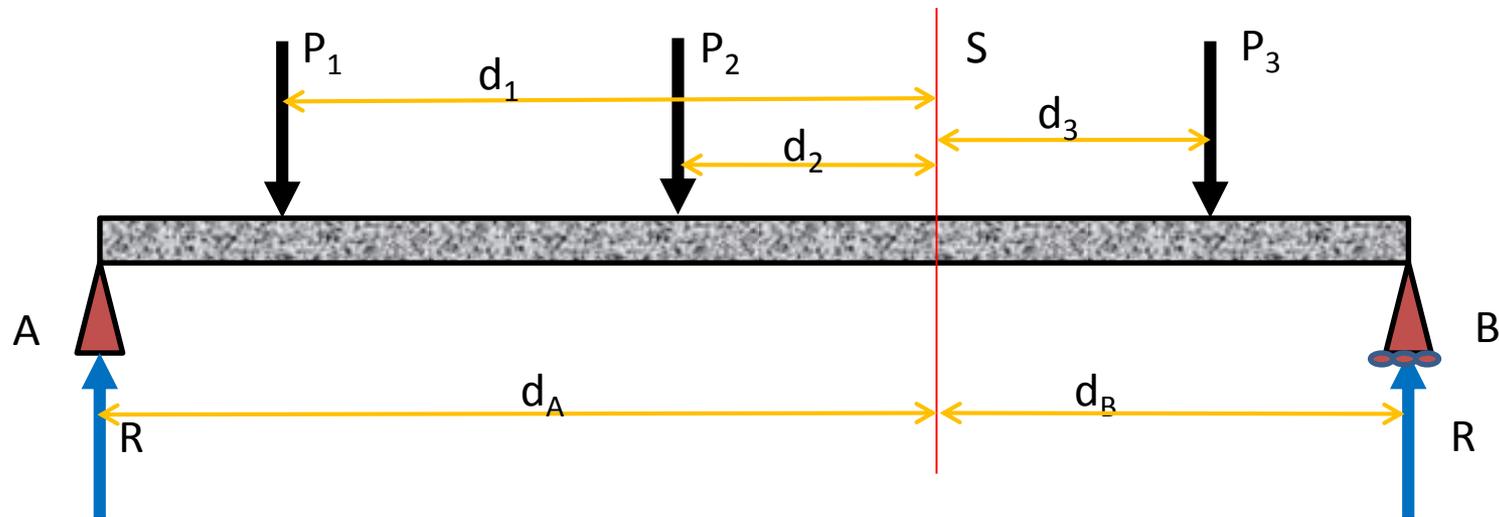
Viga pre fabricada

Viga simplesmente apoiada

## FLEXÃO SIMPLES

Diz-se que há flexão simples quando simultaneamente os esforços externos (forças cortantes) e o momento fletor atuam sobre uma viga e tanto estes esforços como o momento estão contidos num mesmo plano, denominado plano das forças ou plano de flexão. Quando só atua momento fletor, nas diversas seções transversais, diz-se que a sollicitação é de flexão pura [Nash, 1982].

Pode-se definir o momento fletor como a somatória dos momentos de todas as forças situadas em um só lado da seção (a direita ou a esquerda) tomados em relação ao centro de gravidade desta seção



Convenções:

Momento fletor positivo sentido anti-horário

$M +$

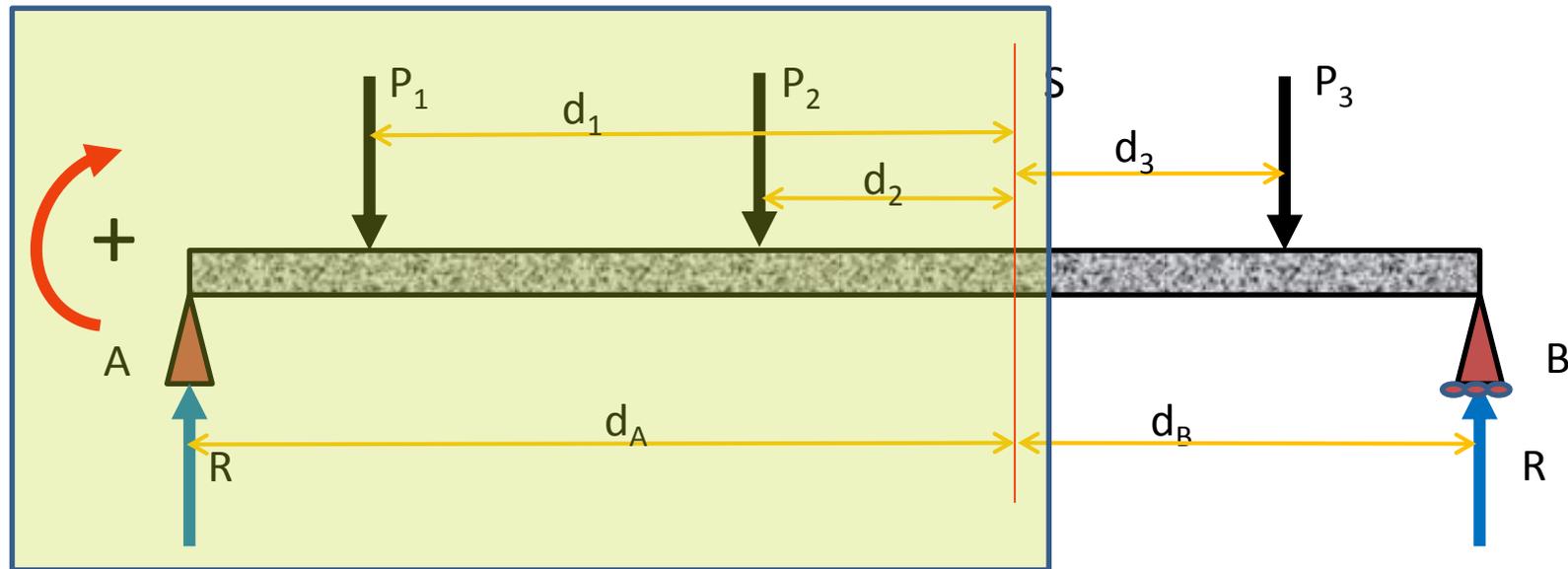


Força cortante positiva de baixo para cima

$F +$

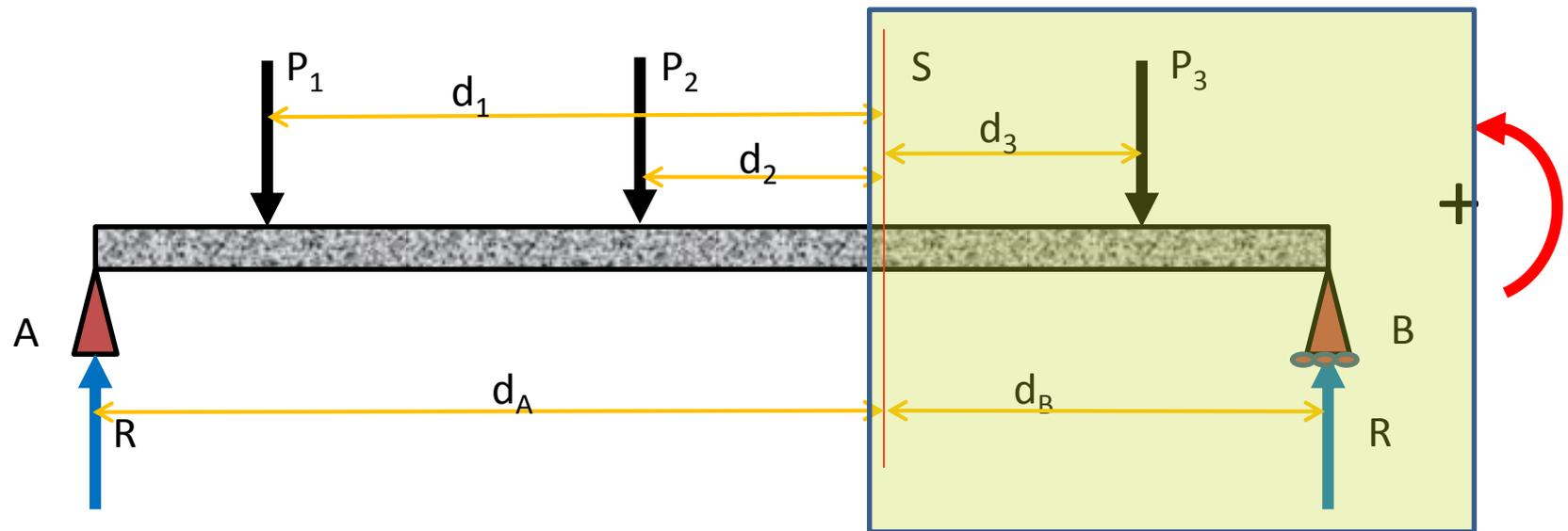


## CARGAS OU FORÇAS A ESQUERDA DA SECÇÃO S



$$M_S = R_A \cdot d_A - P_1 \cdot d_1 - P_2 \cdot d_2$$

## CARGAS OU FORÇAS A DIREITA DA SECÇÃO S



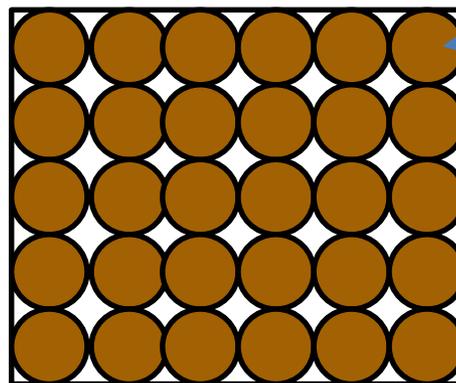
$$M_S = R_B \cdot d_B - P_3 \cdot d_3$$

## VIGA SIMPLEMENTE APOIADA



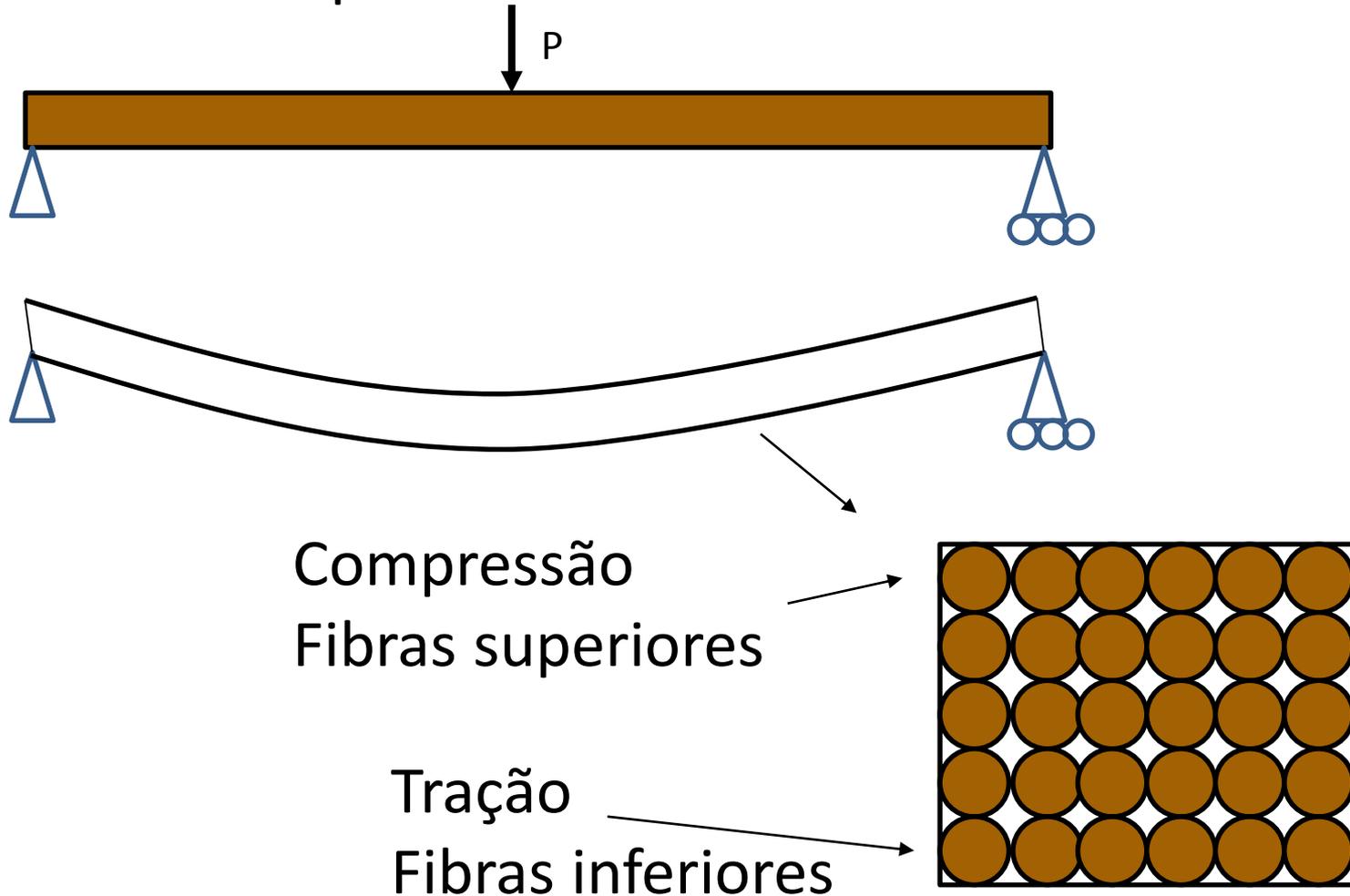
Supondo a viga constituída por fibras

Secção S



fibras

Hipótese de Bernuilli: as seções inicialmente planas permanecem planas durante a flexão.



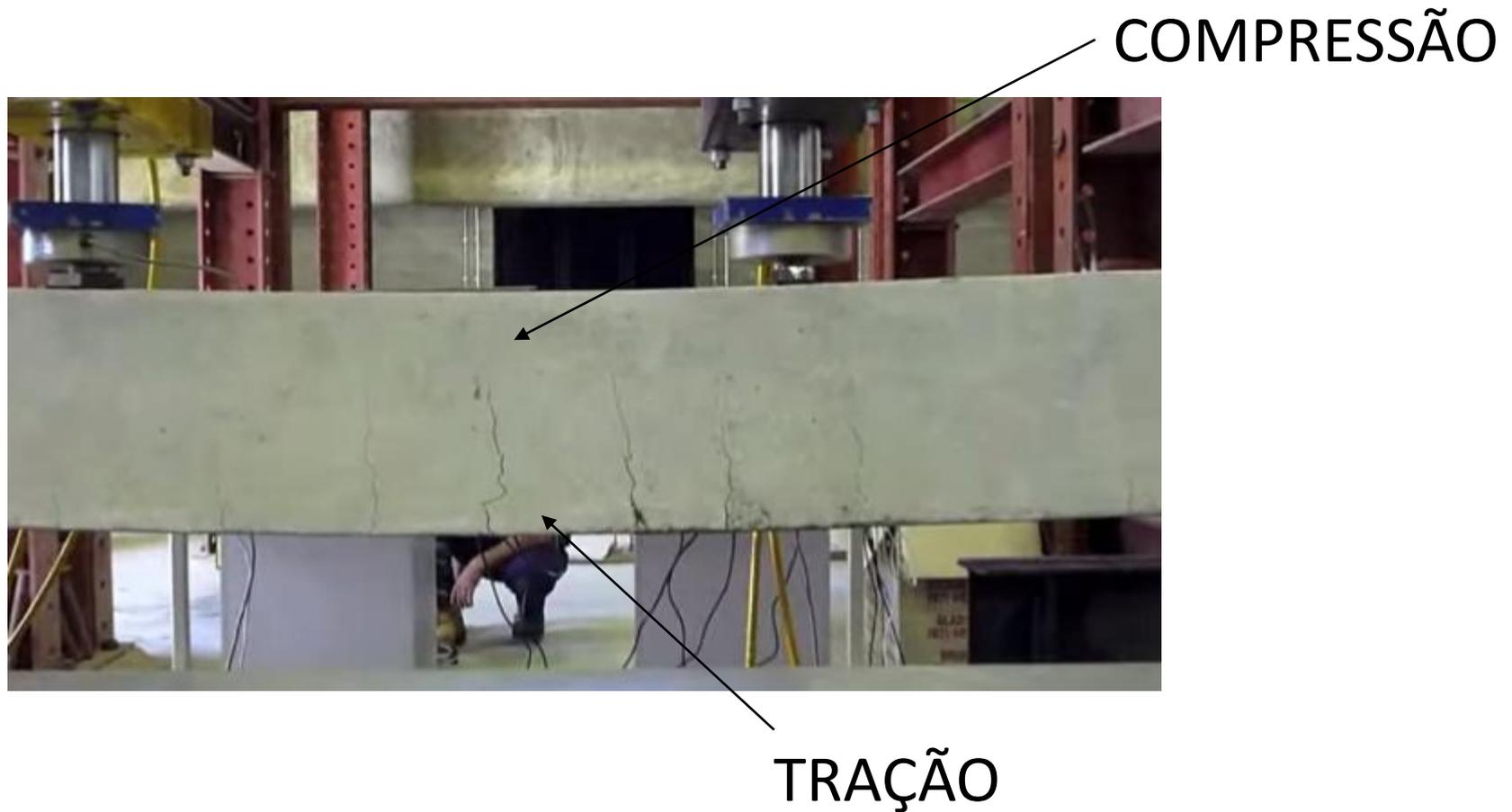
## Ensaio a compressão



## Ensaio a tração por compressão diametral



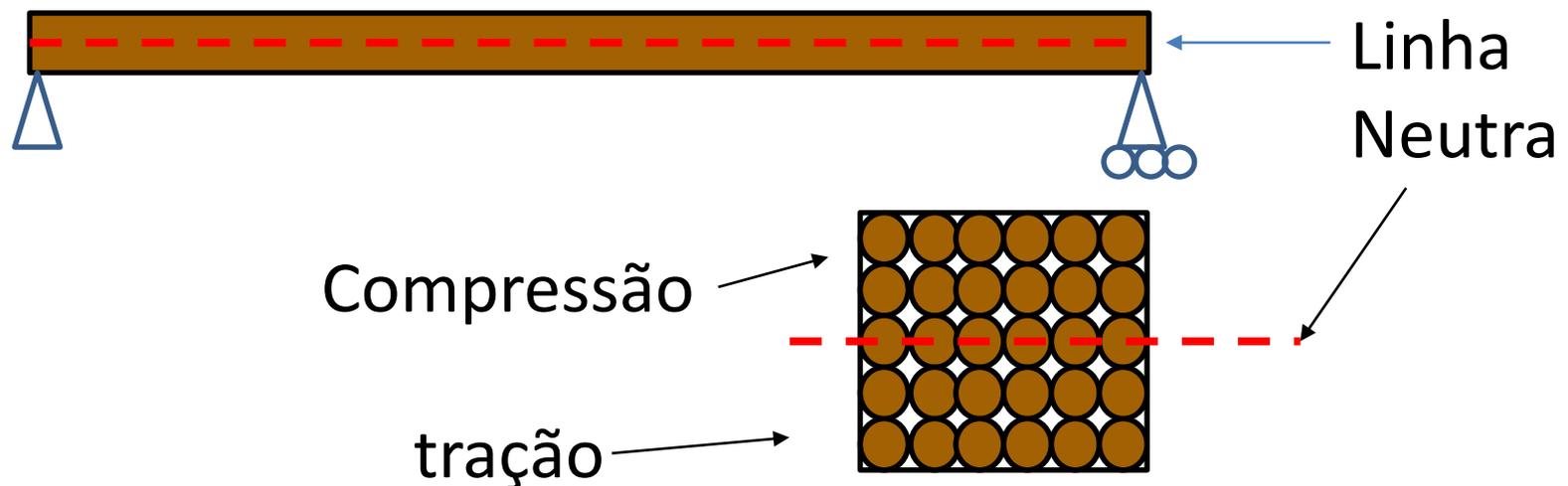
## Ensaio a flexão de uma viga de concreto armado



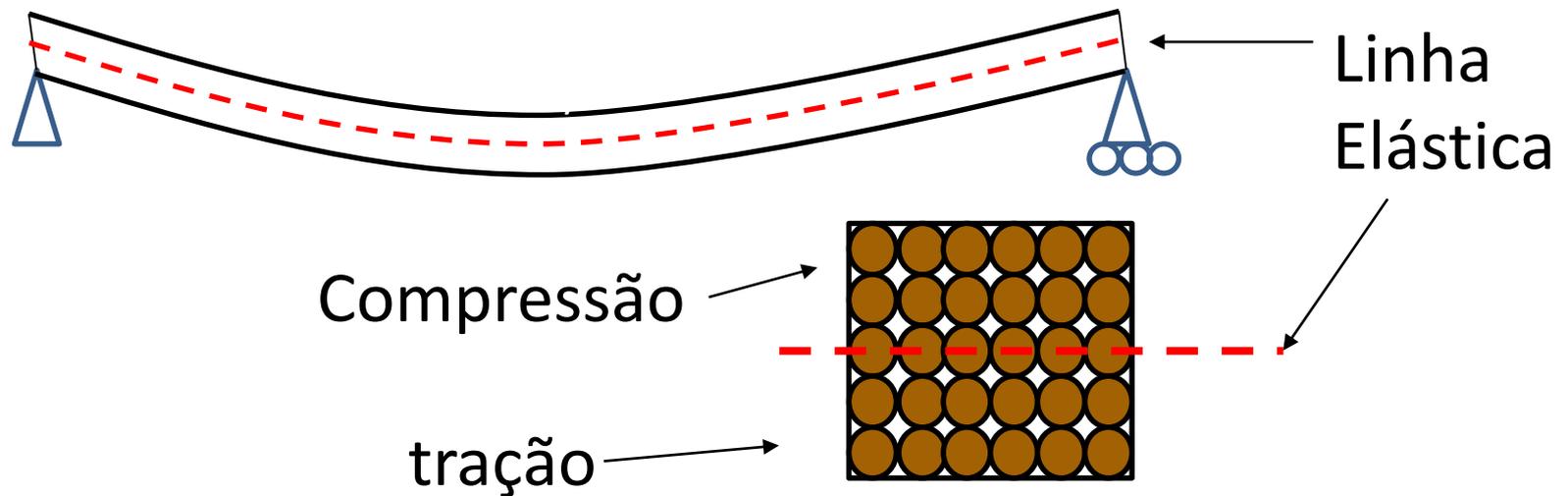
## Ensaio de viga simplesmente apoiada com aplicação de cargas concentradas



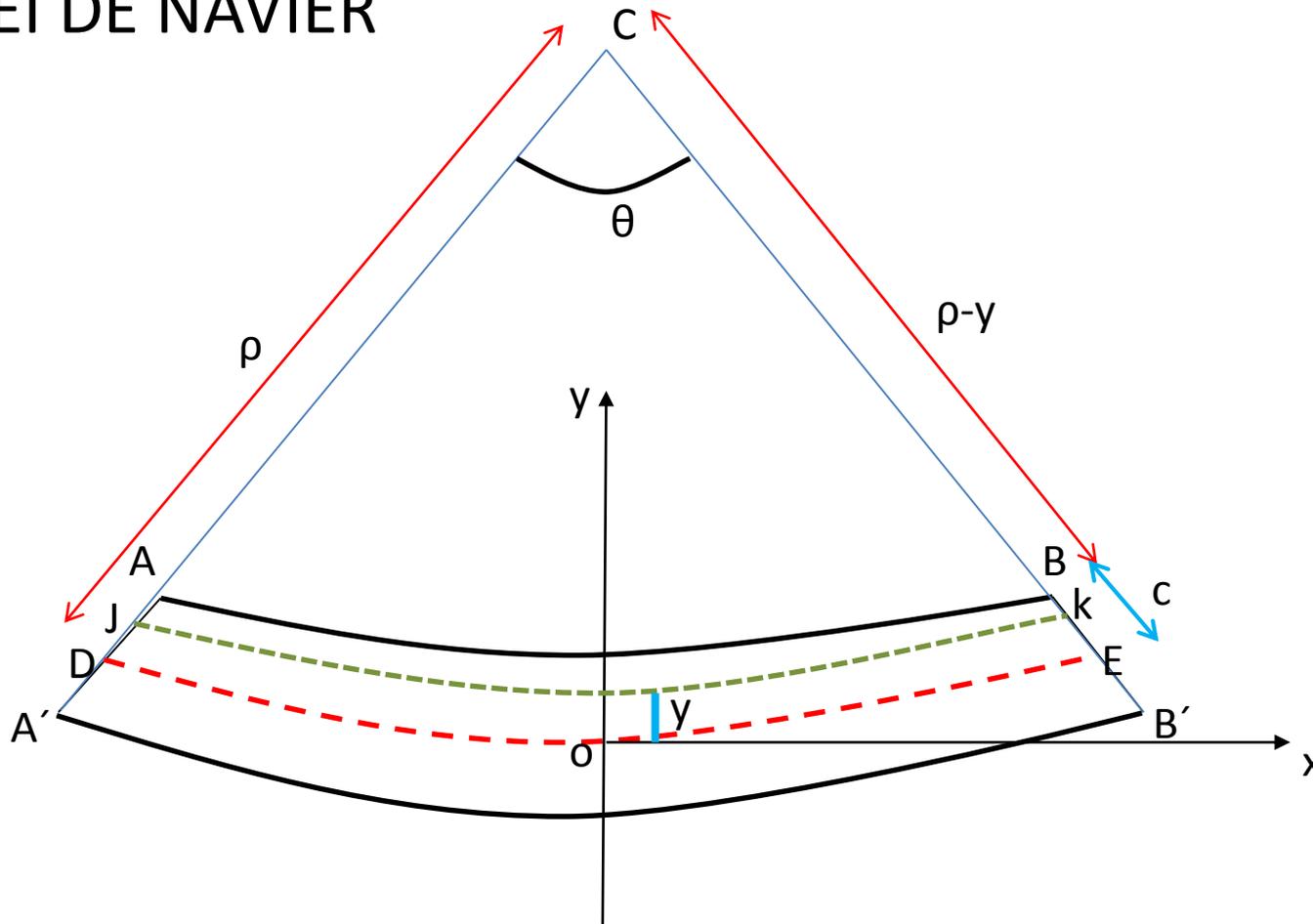
Entre as bordas comprimida e tracionada existe uma camada cujas fibras não sofrem variação alguma de comprimento, não estão sob tensão; a linha baricêntrica (centro de gravidade da seção transversal) desta superfície é denominada de **linha neutra** (interseção do plano da seção transversal com o plano das camadas neutras).



LINHA ELÁSTICA: é o eixo longitudinal da viga deformada



## LEI DE NAVIER



Convenção: deformação com sinal negativo (compressão) adota-se o momento positivo, e a concavidade da barra deformada é voltada para cima

DE = superfície neutra,  
 $\rho$  = raio do arco da circunferência DE,  
 $\theta$  = ângulo central correspondente ao arco DE em radianos.

$DE=L$  (comprimento L da barra indeformada)

$$L = \rho \cdot \theta$$

Para a fibra JK a uma distância y da linha neutra:

$$L' = (\rho - y) \cdot \theta$$

## Deformação

$$\delta = L' - L$$

$$\delta = (\rho - y) \cdot \theta - \rho \cdot \theta$$

$$\delta = -y \cdot \theta$$

A deformação específica longitudinal  $\epsilon_x$  nos elementos que compõem a fibra JK é dado por:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y \cdot \theta}{\rho \cdot \theta} \qquad \epsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

O sinal negativo indica que a deformação é de compressão.

A deformação específica  $\varepsilon_x$  varia linearmente com a distância  $y$  à superfície neutra, ao longo da barra.

VALOR ABSOLUTO MÁXIMO DA DEFORMAÇÃO

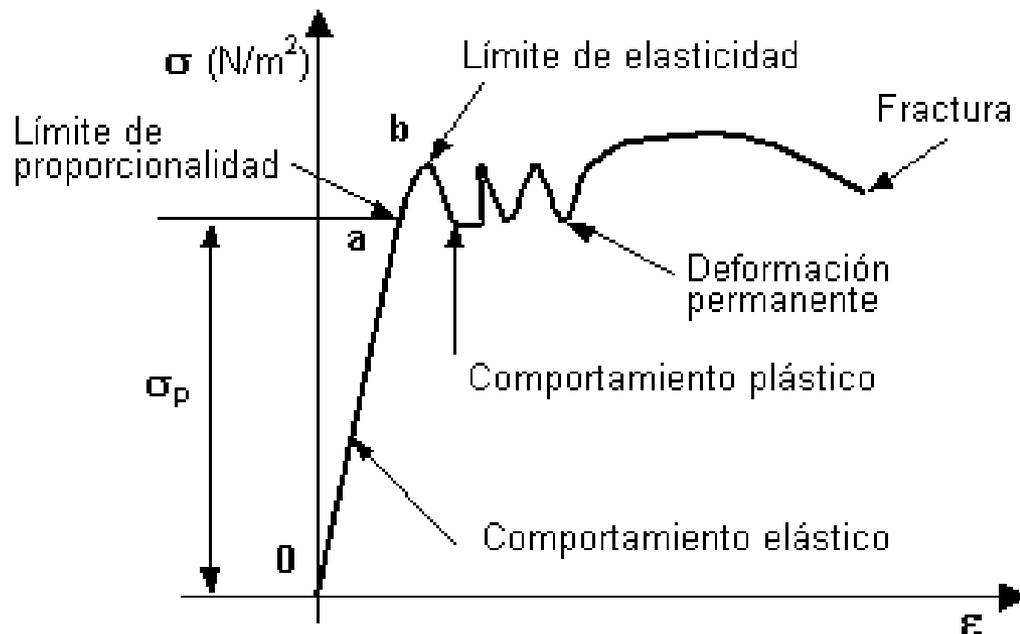
$$y = c$$

em relação à face superior ou inferior da barra

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho}$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{c} \varepsilon_m$$

Condição que as tensões na barra permaneçam abaixo dos limites de proporcionalidade e elasticidade do material, e que não vão ocorrer deformações permanentes, então a lei de Hooke pode ser aplicada para o estado uniaxial de tensões.



Considerando que o material é homogêneo, vem que:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

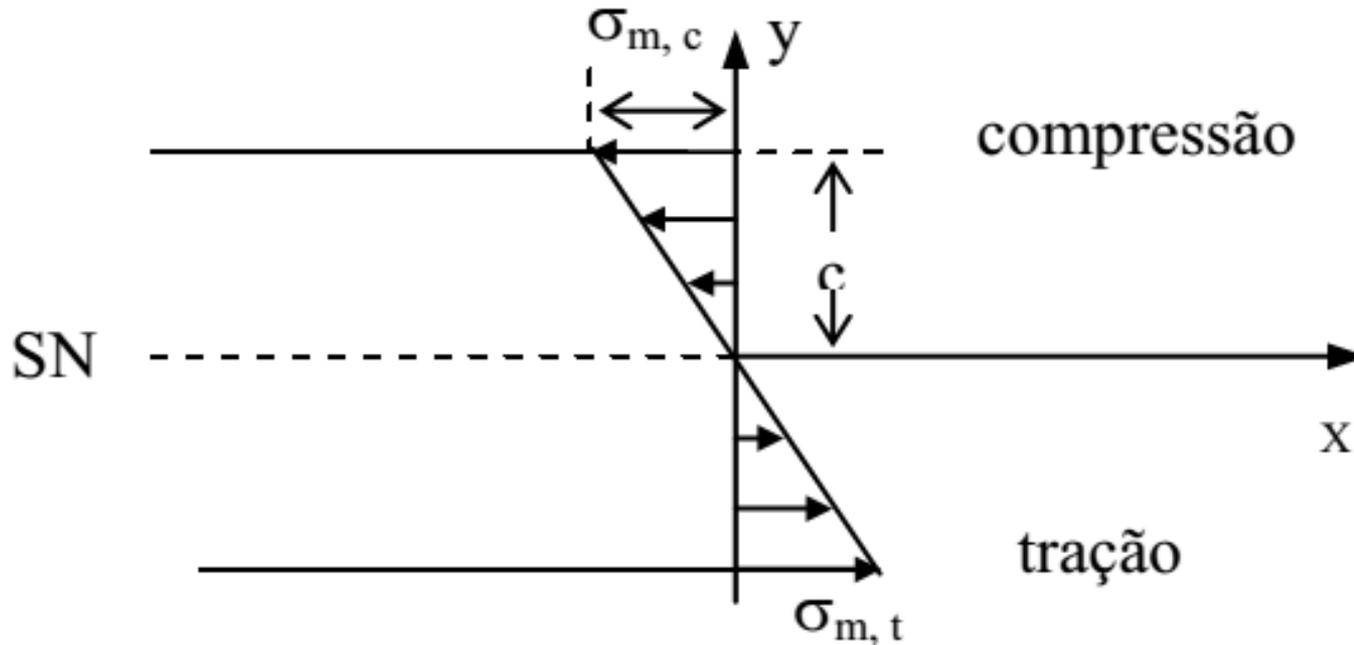
ou

$$E \cdot \varepsilon_x = - \frac{y}{c} E \cdot \varepsilon_m$$

Tensão Máxima

$$\sigma_x = - \frac{y}{c} \sigma_m$$

no regime elástico, a tensão normal varia linearmente com a distância à superfície neutra (Lei de Navier)



Flexão no Regime elástico

$$\sigma_m = \frac{M \cdot c}{I}$$

Tensão de flexão

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I}$$

$I$  = momento de inércia da área da seção transversal

## DISCUÇÕES SOBRE A FLEXÃO NO REGIME ELÁSTICO

$$\sigma_m = \frac{M.c}{I} = \frac{M}{W}$$

$$\sigma_x = \frac{M.y}{I}$$

**Tensão é de compressão** acima do eixo neutro ( $\sigma_m < 0$ ,  $y > 0$ ), quando  $M$  é positivo;

**Tensão de tração** quando o momento  $M$  é negativo.

A relação  $I/c$  só depende da geometria da seção transversal e é chamada de **módulo ou momento resistente (W)**

**“ tensão máxima é inversamente proporcional ao módulo resistente W”**

A deformação da barra submetida à flexão é medida pela curvatura da superfície neutra. A curvatura é definida como o inverso do raio de curvatura  $\rho$ .

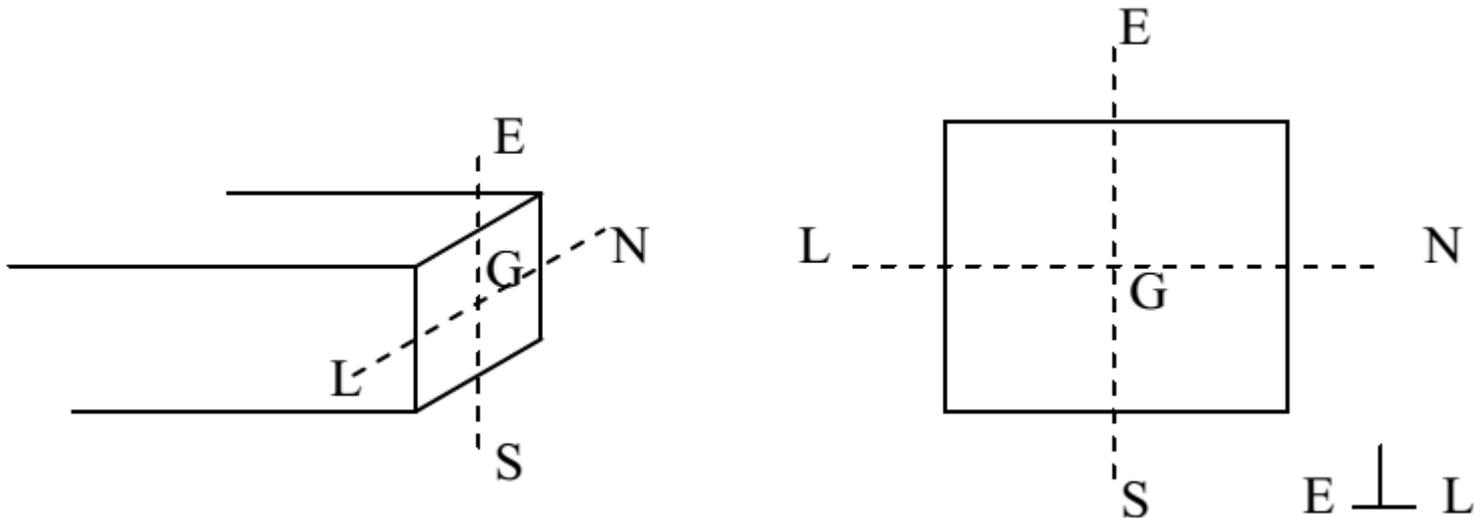
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{E.c} = \frac{1}{E.c} \frac{M.c}{I}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}$$

## CASOS DE FLEXÃO

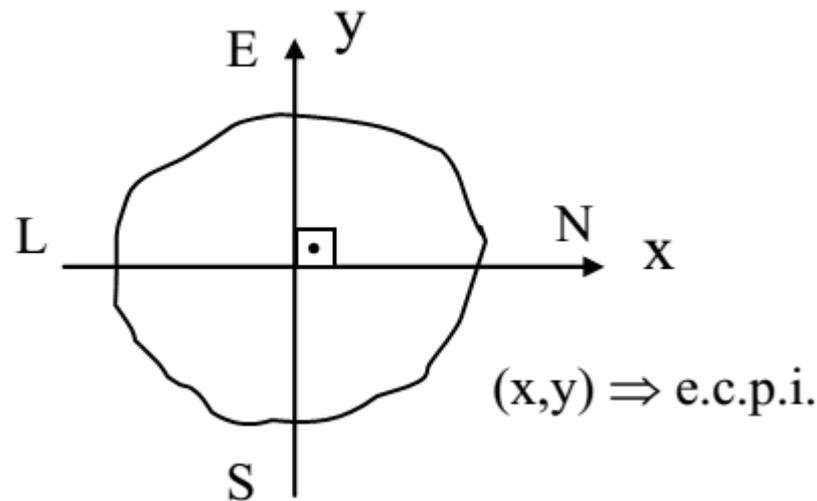
Eixo de solicitação (ES): É a interseção do plano do momento ou o plano das cargas com o plano da seção transversal



Eixo de solicitação é perpendicular a linha neutra

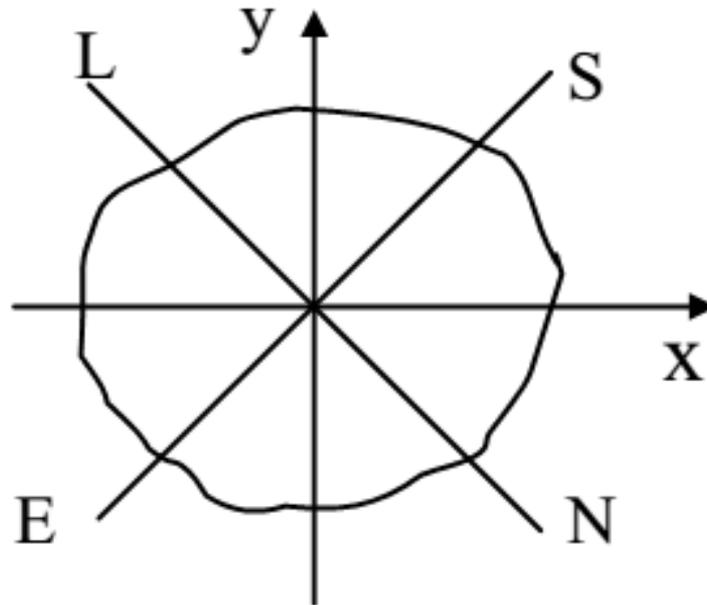
## FLEXÃO SIMPLES NORMAL

É quando o eixo de solicitação coincide com um dos eixos centrais principais de inércia ( e.c.p.i.) da seção transversal



## FLEXÃO SIMPLES OBLÍQUA

É quando o ES não coincide com os eixos centrais principais de inércia



## MÓDULO DE ELASTICIDADE OU DE YOUNG (E)

Uma mola de comprimento  $l_0$  é um componente mecânico elástico, cujo alongamento,  $x$  ( $x = l - l_0$ ), é proporcional à força,  $F$ , que aplicamos sobre ela. Usando-se uma constante de proporcionalidade  $k$  (constante de Hooke), teremos:

$$F = k \cdot x$$

Uma barra com um comprimento  $l_0$  e área da seção transversal  $A_0$ , também pode ser analisada como uma mola. Assim, aplicando-se uma força, a barra se alonga ou comprime, conforme a direção da força, segundo a lei de Hooke.

Normalizando-se a força em relação à área, e o alongamento em relação ao comprimento inicial, teremos:

$$\frac{F}{A_o} = E \cdot \left( \frac{l - l_o}{l_o} \right)$$

$$\sigma = E \varepsilon$$

onde  $\sigma$  é a tensão e  $\varepsilon$  é o alongamento relativo. A nova constante de proporcionalidade,  $E$ , é chamada de módulo de elasticidade, ou de Young.

Material	Modulo de Young [GPa]
Diamante	1 000
Carbeto de silício (SiC)	450
Tungstênio	406
Ferro	196
Aços de baixa liga	200 - 207
Ferros-fundidos	170 - 190
Cobre	124
Titânio	116
Vidro (SiO <sub>2</sub> )	94
Alumínio	69
Vidro ((Na <sub>2</sub> O - SiO <sub>2</sub> ))	69
Nylon	2 - 4

↑  
E  
↑  
rigidez

Valor do módulo de elasticidade para alguns materiais  
<http://www.mse.cornell.edu/courses/engri111/modulus.htm>