

5. Torção

Nos capítulos anteriores foram discutidas estruturas submetidas a forças axiais, aplicadas na direção das barras analisadas. Este capítulo vai estudar peças submetidas a efeito de torção. Serão estudados tensões e deformações produzidas em peças de seção transversal circular e não circular, sujeitas à ação de conjugados que tendem a torcer essas peças.

5.1 Definições

Então, existe uma torção quando uma seção transversal de uma peça está sob a ação de um conjugado que tende a torce-la. O plano de ação do conjugado é o próprio da seção transversal. Estes conjugados são chamados de momentos de torção, momentos torcionais ou torque \vec{T} , \vec{T}' , figura 5.1, e que têm a mesma intensidade T e sentidos opostos (Nash,1982).

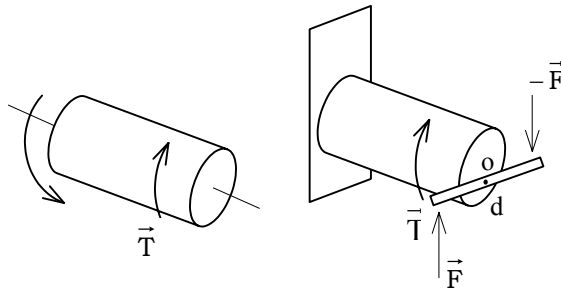


Figura 5.1 Torção

O centro de torção o é o ponto em torno do qual a seção transversal gira. Para seções simétricas, coincide como o centro de gravidade. Eixo de torção é o lugar geométrico dos centros de torção.

5.2 Deformações nos Eixos Circulares

Um eixo circular está fixado a um suporte por uma de suas extremidades e aplicando-se à extremidade livre um momento de torção \vec{T} , o eixo gira, e a seção transversal da extremidade apresenta uma rotação representada pelo ângulo ϕ , chamado ângulo de torção, figura 5.2 (Beer and Johnston, 1989).

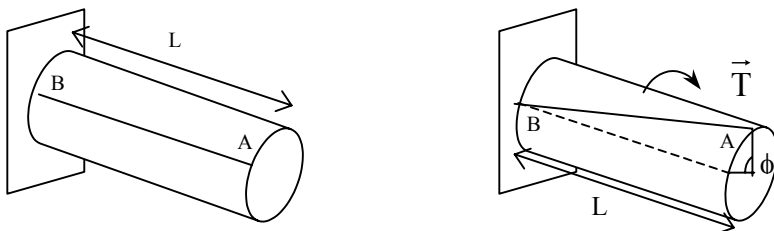


Figura 5.2 Ângulo de Torção

O ângulo de torção, para uma certa faixa de variação de T , é proporcional tanto a T como ao comprimento do eixo L .

A figura 5.3 mostra um prisma de seção circular, tendo uma de suas extremidades fixas, submetido a um momento de torção T .

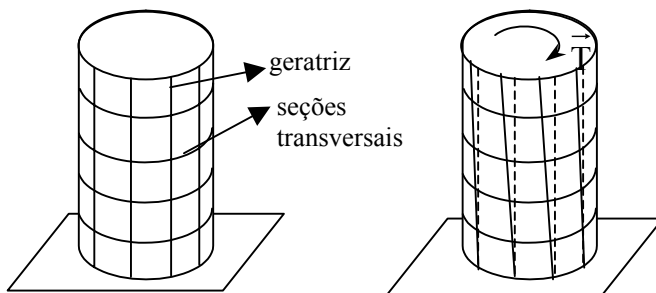


Figura 5.3 Prisma de seção circular

Da figura 5.3, conclui-se que:

- as geratrizes se transformam em hélices;
- o “quadrado” se transforma em um “losango” com os lados sofrendo a mesma deformação angular;
- as seções normais permanecem planas e normais ao eixo de rotação e conservam sua forma. Neste caso, é preciso assegurar que os momentos sejam aplicados de tal forma que as extremidades também permaneçam planas sem deformação.

Considerando agora uma eixo circular de comprimento L e raio c , que foi torcido em um ângulo de torção ϕ , e passa-se à determinação da distribuição de tensões de cisalhamento na seção transversal, figura 5.4a. Retirando do interior do eixo um cilindro de raio ρ , marcando-se um “quadrado” sobre a superfície do mesmo, sem atuação de momento de torção, figura 5.4b. Após a aplicação da torção o “quadrado” se transforma em “losango”, figura 5.4c. No Capítulo 3, foi visto que as deformações de cisalhamento em um certo elemento são medidas pela variação de dois lados; no presente caso os dois lados do elemento são formados por dois círculos, que permanecem inalterados. Deste modo, a deformação de cisalhamento γ deve ser igual ao ângulo formado pelas linhas AB e $A'B$.

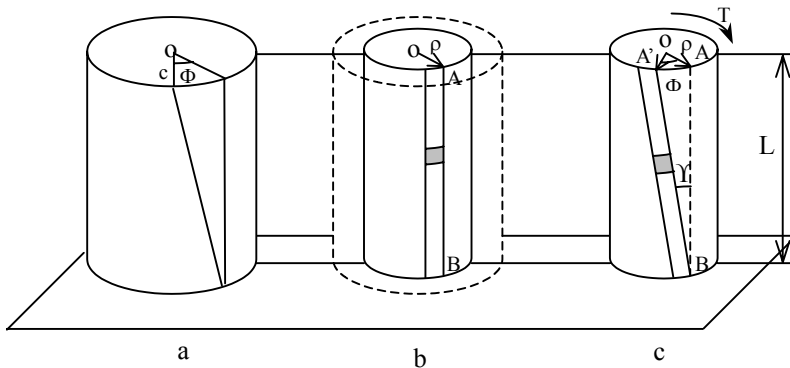


Figura 5.4 Deformação de cisalhamento

Pela figura 5.4c observa-se que quando γ é pequeno, o comprimento de arco AA' é dado por $AA'=L.\gamma$ e na seção transversal $AA'=\rho.\phi$, ou

$$\gamma = \frac{\rho.\phi}{L}, \quad (5.1)$$

onde γ e ϕ são expressos em radianos; observa-se que γ é proporcional tanto ao ângulo de giro ϕ como à distância ρ do centro do eixo circular ao ponto considerado. Então se pode concluir que a deformação de cisalhamento em uma barra circular varia linearmente com a distância ao eixo da barra.

Da equação 5.1, conclui-se, que γ é máximo na superfície da barra circular, onde $\rho = c$, então:

$$\gamma_{\max} = \frac{c.\phi}{L}, \quad (5.2)$$

Das equações 5.1 e 5.2, vem que

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \cdot \gamma_{\max}. \quad (5.3)$$

5.3 Tensões no Regime Elástico

Na análise sobre torção de eixos circulares, não foi adotada até agora nenhuma relação entre tensões e deformações. Considerando agora o caso em que a torção T tem um valor tal que as tensões no material se mantêm abaixo da tensão de cisalhamento de escoamento τ_e . Nesse caso, as tensões no material permanecem abaixo dos limites de proporcionalidade e elasticidade. Então, pode-se aplicar a Lei de Hooke, pois não haverá deformação permanente.

Então, da equação 3.3:

$$\tau = G.\gamma, \quad (5.4)$$

e multiplicando a equação. 5.3 por G , vem:

$$G.\gamma = \frac{\rho}{c}.G.\gamma_{\max},$$

e da equação. 5.4, tem se que:

$$\tau = \frac{\rho}{c}.\tau_{\max}. \quad (5.5)$$

A equação 5.5 mostra que enquanto a tensão de escoamento (ou limite de proporcionalidade) não for atingida, a tensão de cisalhamento na barra varia linearmente com a distância ρ do eixo da barra.

A figura 5.5a mostra a distribuição das tensões de cisalhamento na seção transversal de eixo circular maciço enquanto que a figura 5.5b apresenta a distribuição para um eixo circular vazado, de raio interno c_1 , e raio externo c_2 .

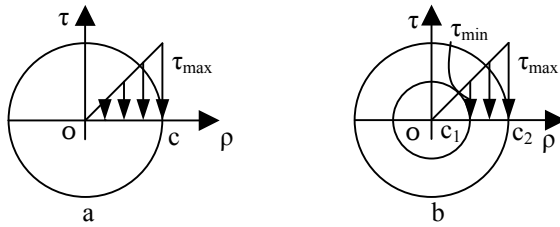


Figura 5.5 Distribuição de tensões

Da equação 5.5 vem que, para o segundo caso:

$$\tau_{\min} = \frac{c_1}{c_2}.\tau_{\max}. \quad (5.6)$$

É possível demonstrar que,

$$\tau_{\max} = \frac{T.c}{J}, \quad (5.7)$$

sendo J o momento de inércia polar da seção transversal. Substituindo a equação 5.7 na equação 5.5, encontra-se,

$$\tau = \frac{T.\rho}{J}, \quad (5.8)$$

que é a tensão de cisalhamento a uma distância ρ do eixo da barra.

As equações 5.7 e 5.8 são conhecidas como as fórmulas da torção em regime elástico. Dá estática tem-se que:

$$J = \frac{1}{2}.\pi.c^4, \text{ momento de inércia polar de círculo de raio } c;$$

$$J = \frac{1}{2}.\pi.(c_2^4 - c_1^4), \text{ momento de inércia polar de um eixo circular de seção vazada com raio interno } c_1 \text{ e raio externo } c_2.$$

| | | |
|----------------|---------------|-----------|
| T | \Rightarrow | $N.m,$ |
| c, ρ | \Rightarrow | $m,$ |
| J | \Rightarrow | $m^4,$ |
| τ | \Rightarrow | $N/m^2,$ |
| γ, ϕ | \Rightarrow | radianos. |

5.4 Ângulo de Torção no Regime Elástico

Considera-se inicialmente o caso de um eixo circular de comprimento L , seção transversal uniforme de raio c . O eixo está sujeito à ação de um momento de torção T , figura 5.4c.

O ângulo de torção ϕ e a deformação de cisalhamento máxima γ_{\max} estão relacionados por:

$$\gamma_{\max} = \frac{c.\phi}{L}, \quad (5.9)$$

e como em regime elástico a tensão de escoamento não é exigida em nenhum ponto do eixo, pode-se aplicar a Lei de Hooke, escrevendo $\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G}$, e da equação 5.7, vem que:

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{T.c}{J.G}. \quad (5.10)$$

Igualando as equações 5.9 e 5.10, encontra-se:

$$\phi = \frac{T.L}{J.G}, \quad (5.11)$$

onde ϕ é expresso radianos. A relação obtida mostra que, dentro do regime elástico, o ângulo de torção ϕ é proporcional ao momento de torção T aplicado no eixo circular.

A equação 5.11 para o cálculo do ângulo de torção só pode ser usada no caso de material homogêneo, para eixos de seção transversal constante e momentos aplicados nas extremidades da barra. Se os eixos estiverem submetidos a momentos de torção aplicados em outros pontos, com seções transversais compostas de materiais diferentes, ou seções transversais variáveis, deve-se dividi-lo em várias partes, onde cada uma delas, individualmente, satisfaça as condições de emprego da equação 5.11.

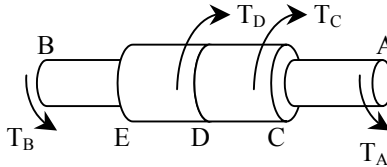


Figura 5.6 Seções variáveis

No caso do eixo AB, figura 5.6, deve-se considerar quatro partes diferentes: AC, CD, DE e EB. O ângulo de torção total do eixo, isto é, o ângulo segundo o qual a seção A gira em relação a seção B, será obtido somando algebricamente os ângulos de torção de cada parte componente. Então o ângulo de torção total será dado por:

$$\phi = \sum_i \frac{T_i \cdot L_i}{J_i \cdot G_i}, \quad (5.12)$$

onde T_i , L_i , J_i e G_i correspondem a parte i do eixo.

Os eixos de transmissão podem ser maciços ou vazados (ocos). Por exemplo, a figura 5.7a. mostra a turbina A conectada ao gerador B por meio do eixo de transmissão AB. Dividindo o conjunto nas três partes componentes, figura 5.7b, observa-se que a turbina exerce sobre o eixo um momento torcional ou torque \vec{T} , e o eixo exerce sobre o gerador um torque de mesma intensidade. O gerador reage, exercendo sobre o eixo o momento torcional contrário \vec{T}' , da mesma maneira que a reação do eixo à ação da turbina é também o torque \vec{T}' (Beer and Johnston, 1989).

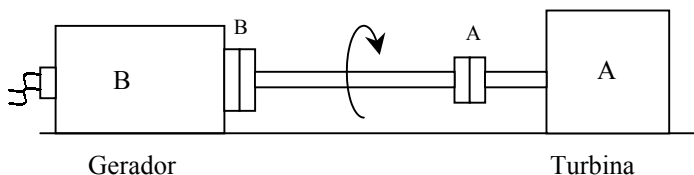


Figura 5.7a Eixo de Transmissão AB

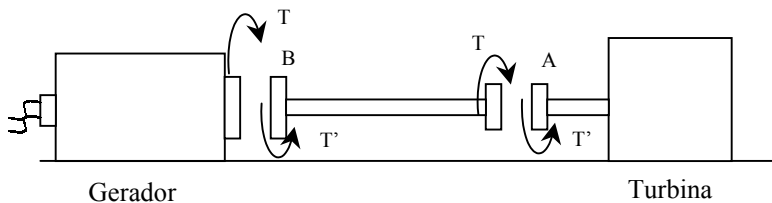


Figura 5.7b Partes do eixo de transmissão

Os eixos mostrados anteriormente, figura 5.4 e para a dedução da equação 5.12 tinham uma extremidade livre e outra engastada a um suporte fixo. Neste caso, o ângulo de torção ϕ do eixo circular é igual ao ângulo de rotação da extremidade livre. No entanto, quando as duas extremidades do eixo giram, o ângulo de torção do eixo é igual ao ângulo segundo o qual um extremidade girou em relação a outra. Por exemplo:

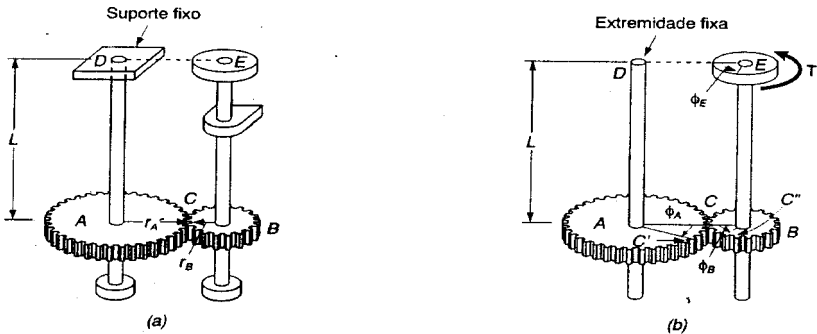


Figura 5.7c Ângulo relativo

Ângulo de torção da seção A é medido pelo ângulo de rotação ϕ_A .

Para o eixo BE, que tem as extremidades livres, o ângulo de torção é igual a diferença entre os ângulos de rotação ϕ_A e ϕ_B , isto é, segundo a extremidade E gira em relação à extremidade B. Chamando esse ângulo relativo de $\phi_{E/B}$, vem que (figura 5.7c)

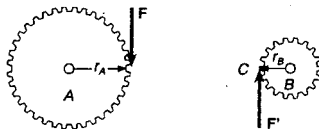
$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B = \frac{T.L}{J.G}. \quad (5.13)$$

Exemplo

No conjunto da figura 5.7c, $r_A = 2.r_B$, determinar o ângulo de rotação da extremidade do eixo BE, quando o momento de torção T é aplicado em E.

Calcula-se inicialmente o momento de torção T_{AD} que

atua no eixo AD. No ponto de contato, C, das duas rodas dentadas ocorrem duas forças iguais e de sentido contrário, \vec{F} e \vec{F}' . Sabe-se que $r_A = 2.r_B \Rightarrow T_{AD} = 2.T$, onde T é o momento de torção do eixo BE.



Então:

Extremidade D fixa \Rightarrow ângulo de rotação de A $\Rightarrow \phi_A$

$$\phi_A = \frac{T_{AD} \cdot L}{J \cdot G} = \frac{2 \cdot T \cdot L}{J \cdot G}$$

Da figura 5.7c: Arco CC' = Arco CC'' $\Rightarrow r_A \cdot \phi_A = r_B \cdot \phi_B$, então:

$$\Phi_B = \frac{r_A}{r_B} \cdot \phi_A = 2 \cdot \phi_A,$$

então:

$$\phi_B = 2 \cdot \phi_A = \frac{4 \cdot T \cdot L}{J \cdot G}$$

E no eixo BE : ângulo de torção $\Rightarrow \phi_{E/B} \Rightarrow \phi_{E/B} = \frac{T_{BE} \cdot L}{J \cdot G} = \frac{T \cdot L}{J \cdot G}$

$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B \Rightarrow \phi_E = \phi_{E/B} + \phi_B$$

$$\phi_E = \frac{T \cdot L}{J \cdot G} + \frac{4 \cdot T \cdot L}{J \cdot G} = \frac{5 \cdot T \cdot L}{J \cdot G}$$

5.5 Torção em Barras de Seção Transversal não Circular

As equações deduzidas nas seções anteriores, para a determinação das tensões e distribuição das deformações provocadas por carregamento torcional, são válidas para eixos de seção circular, e foi estabelecido que estas seções transversais permanecem planas após a deformação e mantêm sua forma. Essa hipótese depende da assimetria da barra.

Em uma barra de seção transversal quadrada, quando submetida a uma torção, as suas diagonais bem como as linhas que ligam os pontos médios dos lados se conservam retas, figura 5.8. Porém, qualquer outra linha se deformará quando a barra for torcida, devido a falta de assimetria, e a própria seção transversal sairá do seu plano original (Popov, 1976).

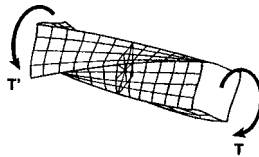


Figura 5.8 Barra de seção quadrada torcida

Deste modo, as equações 5.4 e 5.5, que definem a distribuição de deformações e tensões em um eixo circular de material elástico, não podem ser usadas para seções não circulares. Assim, seria errado adotar uma barra de seção quadrada, uma distribuição de tensões linear a partir do eixo da barra, variando com a distância ao centro da seção, que levassem a um máximo de tensões nos vértices do quadrado.

A determinação das tensões nas barras não circulares submetidas à torção, está além do alcance deste texto. Por conveniência, indicam-se aqui alguns resultados da Teoria da Elasticidade, para o caso de barras de eixo reto, com seção retangular constante.

A barra da figura 5.9, tem comprimento L e lados a e b (respectivamente lado maior e lado menor), está submetida ao torque \vec{T} . A tensão máxima de cisalhamento e o ângulo de torção são dados por:

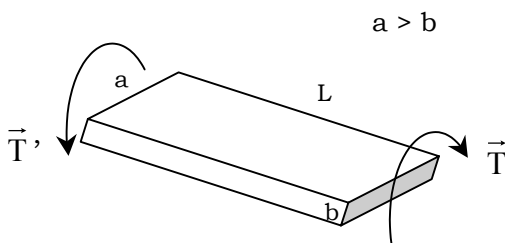


Figura 5.9 Seção transversal não circular

$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 \cdot a \cdot b^2}, \quad (5.14)$$

$$\phi = \frac{T \cdot L}{c_2 \cdot a \cdot b^3 \cdot G}, \quad (5.15)$$

onde os coeficientes c_1 e c_2 , dados na tabela 5.1, dependem da relação a/b , G é o módulo de elasticidade transversal. As equações 5.13 e 5.14 são válidas apenas para o regime elástico.

Tabela 5.1 Coeficientes para a torção de barras retangulares

| a/b | c_1 | c_2 |
|----------|-------|-------|
| 1,0 | 0,208 | 0,141 |
| 1,2 | 0,219 | 0,166 |
| 1,5 | 0,231 | 0,196 |
| 2,0 | 0,246 | 0,229 |
| 2,5 | 0,258 | 0,249 |
| 3,0 | 0,267 | 0,263 |
| 4,0 | 0,282 | 0,281 |
| 5,0 | 0,291 | 0,291 |
| 10,0 | 0,312 | 0,312 |
| ∞ | 0,333 | 0,333 |

5.6 Teorema de Bredt

“Em uma barra cilíndrica vazada de seção não-circular de espessura t fina, submetida a torção, as tensões de cisalhamento nos pontos de uma mesma espessura, são representadas por um valor médio da tensão de cisalhamento.”

A figura 5.10 mostra este caso (Gomes, 1976).

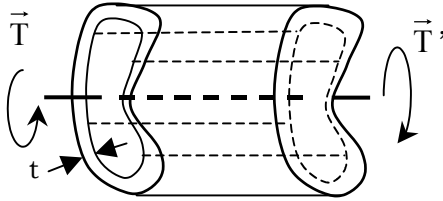


Figura 5.10 Teorema de Bredt

Este teorema conduz a uma distribuição uniforme de tensões de cisalhamento ao longo de uma linha (uma espessura), conforme mostra a figura 5.11.

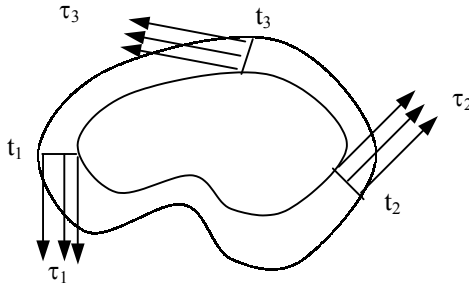


Figura 5.11 Distribuição de tensões

Devido ao fato que a espessura t é muito fina, a distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da espessura pode ser representada por um valor médio da tensão de cisalhamento (teorema de Bredt) figura 5.12 e matematicamente é dada por :

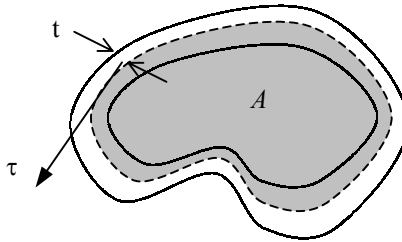


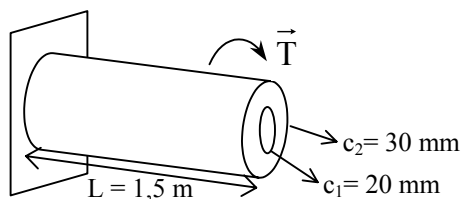
Figura 5.12 Valor médio da tensão

$$\tau = \frac{T}{2tA} \quad (5.16)$$

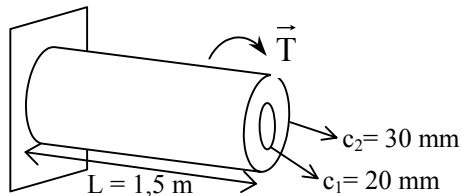
onde A é a área limitada pela linha central, ou seja, é aproximadamente uma média das duas áreas entre as paredes interna e externa da barra.

Exercícios Propostos

- 1) Um eixo circular vazado de aço tem comprimento de 1,5 m e diâmetros interno e externo respectivamente de 40 mm e 60 mm, conforme a figura abaixo. Qual é o maior momento de torção que pode se aplicado ao eixo, para que as tensões de cisalhamento não excedam 120 MPa? Qual é o valor mínimo da tensão de cisalhamento para esse caso?

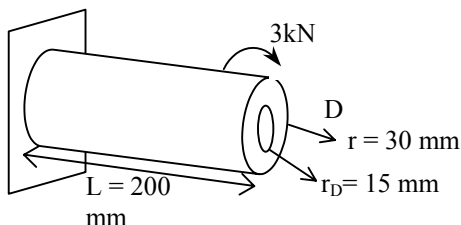


- 2) Um eixo de seção circular de diâmetro igual a 4,45 cm está submetido a $T = 10 \text{ kNcm}$. Calcular a tensão máxima de cisalhamento e o deslocamento angular correspondente a 1 m de comprimento, sendo $G = 800 \text{ kN/cm}^2$.
- 3) Que valor de momento de torção deve ser aplicado à extremidade do eixo circular, figura abaixo, de modo que o ângulo de torção produzido seja 2° , sendo $G = 80 \text{ GPa}$ para o aço.

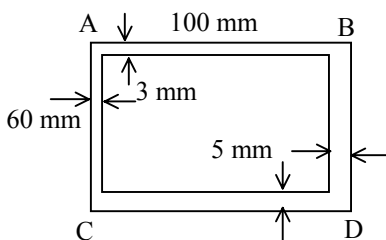
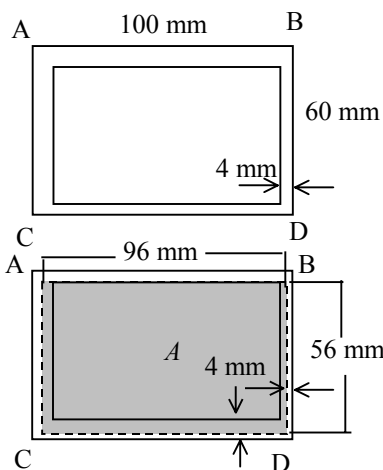


- 4) Calcular, para o eixo da seção vazada, do exercício 1, o valor do ângulo de torção que provoca uma tensão de cisalhamento de 70 MPa na face interna do eixo, com $G = 80 \text{ GPa}$.
- 5) Considere-se um eixo de aço de diâmetro externo igual a 25 cm e interno 15 cm. Qual o momento de torção que lhe pode ser aplicado, admitindo $\tau_{\max} = 800 \text{ kgf/cm}^2$.
- 6) Um eixo vazado, tem 3 m de comprimento e transmite o momento de torção de $T = 2.500 \text{ Nm}$ e o ângulo de deformação ϕ não deve exceder a $0,0303^\circ$. A tensão máxima de cisalhamento $\tau_{\max} = 1,779 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, quais são os diâmetros externo e interno. Dado: $G = 84 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$.
- 7) Um momento de torção de 3.000 Nm é aplicado sobre uma barra de seção circular com 20 cm de diâmetro externo. Qual será o máximo diâmetro interno, de modo que a tensão máxima de cisalhamento não ultrapasse 600 N/cm^2 .

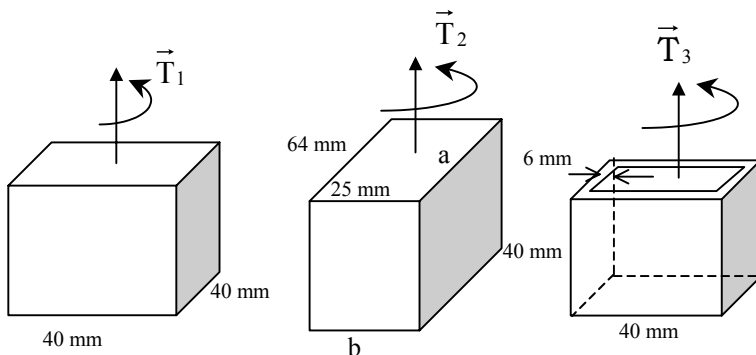
- 8) Um momento de torção de 3 kNm é aplicado ao cilindro maciço de bronze. Determinar:
- máxima tensão de cisalhamento;
 - a tensão de cisalhamento no ponto D que fica em uma circunferência de 15 mm de raio;
 - a parcela do momento resistida pelo cilindro interior.



- 9) Um tubo de alumínio de seção retangular 60x100 mm foi fabricado por extrusão (pressão). Determinar a tensão de cisalhamento em cada uma das quatro paredes do tubo, quando este fica submetido a um momento de torção de 3 kNm adotando:
- espessura da parede constante de 4 mm;
 - que por defeito de fabricação as paredes AB e AC são de 3 mm, e as paredes BD e CD são de 5 mm.



- 10) Determinar o maior valor do momento torçor que pode ser aplicado a cada uma das barras de latão, figura a seguir, adotando $\tau_{\max} = 40 \text{ MPa}$.

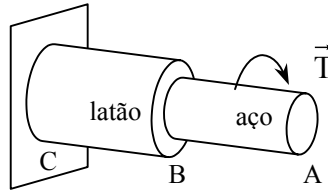


- 11) Pede-se determinar:

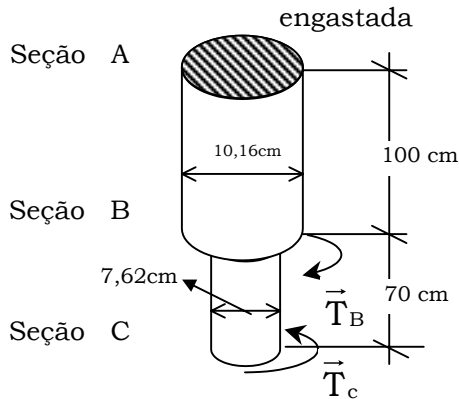
- o ângulo de torção causado por um torque de 4.500 Nm, em um eixo de alumínio maciço de 75 mm de diâmetro;
- idem à parte a, assumindo que o eixo maciço tenha sido substituído por um eixo vazado como o mesmo diâmetro externo e com 24,4 mm de diâmetro interno. O comprimento do eixo é de 1,2 m e $G = 25,5 \text{ GPa}$.

- 12) Sabe-se que as tensões de cisalhamento admissíveis das barras circulares AB e CD são de respectivamente 83 MPa e 48 MPa. O momento torçor aplicado em A é de 7,5 kNm. Determinar o diâmetro necessário:

- da barra AB;
- da barra BC.



- 13) O eixo de seção não constante, conforme mostra a figura, é de aço com $G = 0,84 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$. Na extremidade inferior está aplicado um torque de $60 \times 10^3 \text{ kgf.cm}$, e na seção B, o torque de $90 \times 10^3 \text{ kgf.cm}$ com os sentidos indicados na figura. Determinar a tensão máxima de cisalhamento em cada um dos trechos da seção constante, e os ângulos de torção em B e C.



- 14) Um eixo maciço de aço, de seção transversal circular, é envolvido por um tubo de cobre, rigidamente ligado ao aço. O conjunto está solicitado à torção. Sabendo-se que o cobre absorve 1,5 vezes o momento de torção absorvido pelo aço, pede-se determinar a relação entre os diâmetros externo e interno, do tubo de cobre. Para o cobre $G = 0,42 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, e para o aço, $G = 0,84 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$.

Respostas dos Exercícios Propostos

- 1- 4,08 kNm; 80 MPa.
- 2- 578 N/cm²; 1,86°.
- 3- 1,901 kNm;
- 4- 3,76°.
- 5- 2,136x10⁶ kgfcm.
- 6- 0,20 m; 0,24 m.
- 7- 18 cm.
- 8- 70,74 MPa; 35,37 MPa; 6,25%.
- 9- 69,8x10⁶ N/m²; 93x10⁶ N/m²; 55,8x10⁶ N/m².
- 10- 532,5 Nm; 414,4 Nm; 555Nm.
- 11- 3,906°; 3,953°.
- 12- 77,21 mm; 92,67 mm.
- 13- 145,7 kgf/cm²; 690,6 kgf/cm²; 0,670°.
- 14- $\sqrt{2}$.