

## 2. Dilatação Volumétrica

Considera-se um cubo elementar de um certo material, figura 2.1 e adotando para suas dimensões arestas de comprimento unitário. Sob a ação de um carregamento multiaxial o cubo elementar se deforma, cujos lados têm comprimentos, respectivamente,  $1+\varepsilon_x$ ,  $1+\varepsilon_y$ ,  $1+\varepsilon_z$ , onde  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  são as deformações específicas nas direções dos três eixos coordenados [Beer and Johnston, 1989].

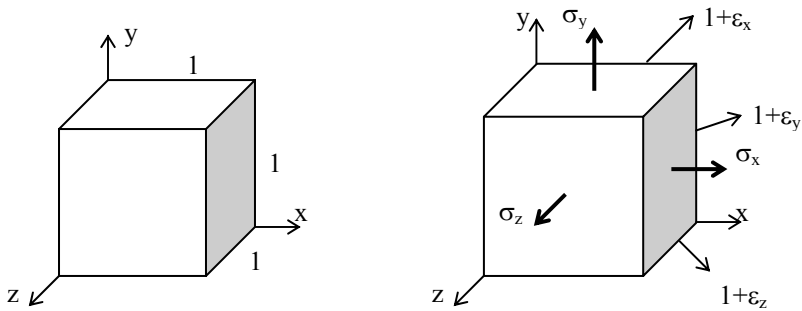


Figura 2.1 Cubo elementar e

Considerando  $V_0$  o volume do cubo elementar, vem

$$V_0 = d_x \cdot d_y \cdot d_z, \quad (2.1)$$

e após a ação das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , tem-se as deformações  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$ , o volume torna-se:

$$V_1 = d_{x1} \cdot d_{y1} \cdot d_{z1}, \quad (2.2)$$

mas,

$$d_{x1} = d_x + \delta_x ,$$

$$d_{y1} = d_y + \delta_y ,$$

$$d_{z1} = d_z + \delta_z ,$$

sabe-se que,

$$\delta_x = \varepsilon_x . d_x ,$$

$$\delta_y = \varepsilon_y . d_y ,$$

$$\delta_z = \varepsilon_z . d_z ,$$

a equação 2.2 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} V_1 &= (d_x + \varepsilon_x . d_x)(d_y + \varepsilon_y . d_y)(d_z + \varepsilon_z . d_z) , \\ V_1 &= [d_x . (1 + \varepsilon_x) d_y . (1 + \varepsilon_y) d_z . (1 + \varepsilon_z)] , \end{aligned} \quad (2.3)$$

e como  $V_0$  é unitário, pois  $d_x = d_y = d_z = 1$  a equação 2.3 torna-se:

$$V_1 = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) . \quad (2.4)$$

O interesse se prende na variação volumétrica por unidade de volume ( $e$ ), tem-se que:

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_1 - V_0}{V_0} ,$$

$$e = \frac{[(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)] - 1}{1} ,$$

$$e = [1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x . \varepsilon_y + \varepsilon_x . \varepsilon_z + \varepsilon_y . \varepsilon_z + \varepsilon_x . \varepsilon_y . \varepsilon_z] - 1 , \quad (2.5)$$

e considerando que as deformações específicas são muito menores que a unidade, a equação 2.5, torna-se:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z , \quad (2.6)$$

que representa a dilatação volumétrica (ou cúbica) específica do material.

Substituindo a equação 1.17 na equação 2.6, vem:

$$e = \frac{1-2\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) . \quad (2.7)$$

No caso de um corpo ser submetido a pressão uniforme hidrostática, cada componente da pressão é igual  $-p$  ( $\sigma = -p$ ), ou seja,  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ , a equação 2.7. torna-se:

$$e = \frac{-3p(1-2\nu)}{E} . \quad (2.8)$$

Fazendo,

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} , \quad (2.9)$$

a equação 2.8, torna-se:

$$e = \frac{-p}{k} , \quad (2.10)$$

que é a dilatação ou deformação volumétrica específica, onde  $k$  é a constante chamada de módulo de elasticidade volumétrica (ou cúbica) e é expressa nas mesmas unidades de  $E$  (Pa).

Exemplo.

Determinar a variação volumétrica  $\Delta V$  de uma barra prismática de aço, de lados 80mm, 60mm e 40mm quando está sujeita a uma pressão hidrostática  $p = 180 \text{ MPa}$ .

Dados:

$$E = 200 \text{ GPa},$$

$$\nu = 0,29.$$

Sabe-se que:

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} \Rightarrow \Delta V = e \cdot V_0,$$

$$e = -\frac{p}{k},$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \Rightarrow k = \frac{200 \times 10^9}{3(1-0,58)} = 157,7 \text{ GPa},$$

$$e = -\frac{180 \text{ MPa}}{157,7 \text{ GPa}} = -1,134 \times 10^{-3},$$

$$\Delta V = -1,134 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^{-3} \times 60 \times 10^{-3} \times 40 \times 10^{-3} = -2,18 \times 10^{-7} \text{ m}^3,$$

$$\Delta V = -218 \text{ mm}^3.$$

## 2.1 Tensões Devido a Variações de Temperatura

Nas estruturas estudadas anteriormente, considerou-se que a temperatura permanecesse constante durante o tempo de atuação de forças (carregamento). No entanto, suponha-se situações que ocorram variações de temperatura.

Considera-se uma barra AB, homogênea e de seção transversal uniforme, apoiada em uma superfície lisa e horizontal, figura 2.2a. Se a temperatura da barra for

aumentada de um valor  $\Delta T$ , observa-se que ela se alonga de um valor  $\delta_T$  que é proporcional tanto a variação de temperatura quanto ao comprimento da barra  $L$  (figura 2.2b), ou seja [Beer and Johnston, 1989],

$$\delta_T = \alpha \Delta T L \quad (2.11)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação térmica do material que compõe a barra e representa uma quantidade por grau  $^{\circ}\text{C}$  (Célcios) ou por grau  $^{\circ}\text{F}$  (Fahrenheit).

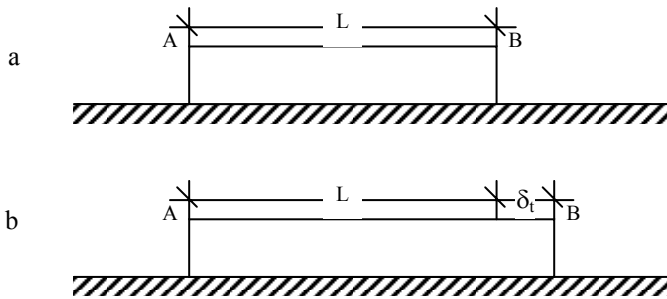


Figura 2.2 Dilatação térmica

A deformação total  $\delta_T$  está relacionada a uma deformação específica, ou seja,

$$\epsilon_T = \frac{\delta_T}{L}, \quad (2.12)$$

ou

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T, \quad (2.13)$$

onde  $\epsilon_T$  é a deformação térmica específica. É importante observar que não está sendo considerado tensões relacionadas com a deformação  $\delta_T$ .

Considera-se, agora, que a barra AB seja colocada entre dois anteparos fixos, separados da distância  $L$ , figura 2.3a. Não existem tensões ou deformações nesta condição inicial. Elevando a temperatura de  $\Delta T$ , o alongamento será nulo, pois os anteparos impedem qualquer deformação. Sendo a barra uniforme e de seção constante, a deformação específica,  $\varepsilon_T$ , em qualquer ponto, também é nula. Porém, para evitar o alongamento da barra, os anteparos aplicam sobre ela as forças  $\vec{P}_A$  e  $\vec{P}_B$  após a elevação da temperatura, figura 2.3b. É criado um estado de tensão\* na barra (sem que ocorram deformações específicas).

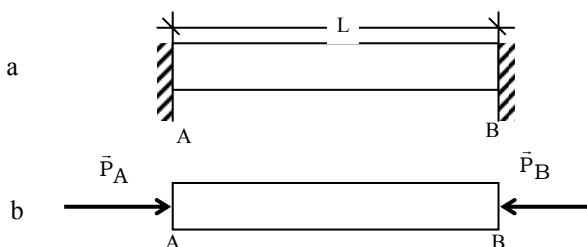


Figura 2.3 Barra entre anteparos

Para se calcular o estado de tensão  $\sigma$  existente procede-se em duas etapas. Na primeira, calcula-se a intensidade de  $\vec{P}$ , retirando o anteparo B, figura 2.4b e a barra se alonga livremente com a variação de temperatura, segundo a equação 2.11. Numa segunda etapa, aplica-se a força  $\vec{P}$ , figura 2.4c obtendo-se uma segunda deformação de acordo com a equação 1.4; esta força representa a reação do anteparo.

---

\* Caso do problema estaticamente indeterminado (hiperestático). Estruturas que não se resolvem só com as equações da estática, sendo necessário recorrer a outras equações.

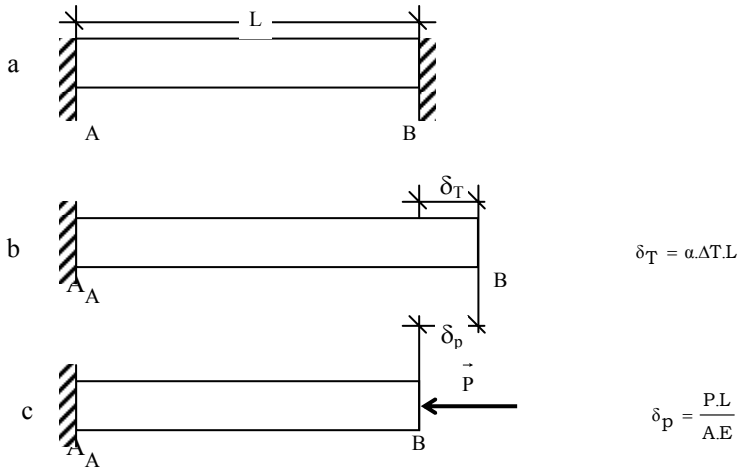


Figura 2.4 Deformação nula

Como a deformação total deve ser nula, então:

$$\delta = \delta_T + \delta_p = \alpha \Delta T L + \frac{P L}{A E} = 0, \quad (2.14)$$

ou,

$$P = -A E \alpha \Delta T,$$

então,

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E \alpha \Delta T, \quad (2.15)$$

que é a tensão atuante na barra devido a variação de temperatura.

Deve-se observar que esse resultado, sob ausência de deformações, se aplicam no caso de barra de seção transversal uniforme e material homogêneo. No caso de uma barra com seções variadas, figura 2.5, poderão haver deformações nas suas componentes com sinais contrários.

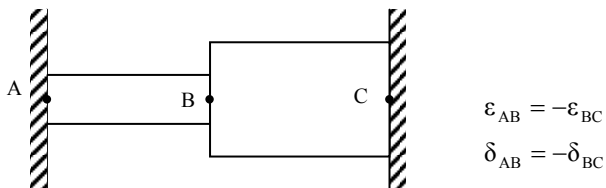
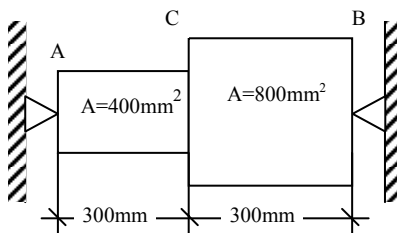


Figura 2.5 Barra com seções variáveis

### Exercícios Propostos

- 1) A barra AB é perfeitamente ajustada aos anteparos fixos quando a temperatura é  $+25^{\circ}\text{C}$ . Determinar as tensões atuantes nas partes AC e CB da barra quando a temperatura é de  $-50^{\circ}\text{C}$ . Dados:  $E = 200\text{GPa}$ ,  $\alpha = 12 \times 10^{-6} / ^{\circ}\text{C}$ .



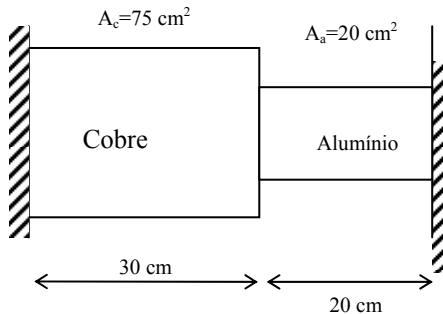
- 2) Considere-se a barra AB compreendida por dois anteparos fixos em suas extremidades, está submetida a uma temperatura de  $20^{\circ}\text{C}$ . Calcular a tensão atuante a uma temperatura de  $-40^{\circ}\text{C}$ . Dados:  $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ,  $L = 1\text{m}$ ,  $A = 0,4\text{m}^2$  e  $\alpha = 10 \times 10^{-6} / ^{\circ}\text{C}$



- 3) Uma barra prismática de um metal, tem o comprimento de 1,5 m e a seção transversal de área igual a  $16 \text{ cm}^2$ . Quando a temperatura é de  $40^\circ\text{C}$ , ela está livre de tensões. Qual a tensão normal quando a temperatura baixa para  $20^\circ\text{C}$ .

Dados:  $E=2,1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$  ,  $\alpha= 16,7 \times 10^{-6} /^\circ\text{C}$ .

- 4) A barra da figura seguinte é formada de um trecho prismático, de alumínio (a direita) e outro também prismático, de cobre (a esquerda). Sabe-se que à temperatura de  $27^\circ\text{C}$  não há tensões normais na barra; quando se diminui a temperatura até atingir-se o valor  $t$ , os engastamentos se deslocam, aproximando-se, um do outro, de  $0,0025 \text{ cm}$ . Qual o valor de  $t$ , sabendo-se que a essa temperatura a tensão normal do alumínio é de  $1700 \text{ N/cm}^2$ . Dados:  $E_c= 1,2 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ ,  $\alpha_c= 16,7 \times 10^{-6} /^\circ\text{C}$ ,  $E_a=0,7 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$  e  $\alpha_a= 23 \times 10^{-6} /^\circ\text{C}$ .



- 5) Os trilhos de uma linha de bonde são soldados a uma temperatura de  $10^\circ\text{C}$ . Que tensões se produzirão nestes trilhos quando, aquecidos pelo Sol atingem a temperatura de  $38^\circ\text{C}$ . Dados:  $E_{aço}=21 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$  ,  $\alpha= 12 \times 10^{-6} /^\circ\text{C}$ .

- 6) Considere uma barra de comprimento  $L_0$ , à uma temperatura  $T_0$  °C; se  $\alpha$  for o coeficiente de dilatação térmica do material, o seu comprimento, à temperatura  $T_0$  °C é  $L = L_0(1 + \alpha.T_0)$  e à temperatura  $T_1$  °C é,  $L_1 = L_0(1 + \alpha.T_1)$ , mostrar que:  $\delta_T = \alpha.\Delta T.L$ .
- 7) Um fio de aço, de diâmetro igual a 6mm, está sujeito a uma força de tração. Foi percebido um alongamento de 0,4mm e um aumento de volume  $\Delta V$  de 2,5mm<sup>3</sup>. Determinar o coeficiente de Poisson. Dado:  $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ .
- 8) Um cabo de alumínio, de 30m de comprimento, é submetido a uma tensão de tração de 70 MPa. Determinar: a) O alongamento do cabo; b) De quantos graus deve-se elevar a temperatura do cabo para se obter o mesmo alongamento. Dados:  $E = 70 \text{ GPa}$ ;  $\alpha = 23 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ .
- 9) Uma barra de alumínio de 25cm de comprimento e seção transversal quadrada, de lado igual a 5cm, está submetida a uma força axial de tração. Determinou-se a deformação longitudinal igual a  $1 \times 10^{-3}$ . Sabendo-se que  $\nu = 0,33$ , qual o volume final da barra?
- 10) Uma esfera de aço está sujeita a uma pressão hidrostática de  $900 \text{ kN/m}^2$ , acarretando em uma redução de  $-0,05 \text{ m}^3$  de seu volume original. Determinar o raio inicial desta esfera. Dados:  $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ;  $\nu = 0,30$ .
- 11) Um cubo é colocado num meio cuja pressão hidrostática é de  $20 \text{ Kg/cm}^2$ . Mediu-se a dilatação cúbica de  $-1/10^5$ . Calcular a relação entre as deformações específicas longitudinal e transversal, sabendo-se que o módulo de elasticidade  $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .

- 12) Uma viga prismática é submetida a tensões axiais uniformes de tração. A deformação longitudinal é  $1/800$  e  $\nu = 1/3$ . Determinar a deformação unitária de volume.

#### Respostas dos Exercícios Propostos

- 1- 240 MPa; 120 MPa.
- 2-  $120 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ .
- 3-  $7,014 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ .
- 4-  $38^\circ\text{C}$ .
- 5-  $7,056 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ .
- 7- 0,39.
- 8- 0,03 m;  $43,5^\circ$ .
- 9-  $625,2125 \text{ cm}^3$ .
- 10- 13,03 m.
- 11- 3.
- 12-  $1/2400$ .