

4. Flexão Simples

Diz-se que há flexão simples quando simultaneamente os esforços externos (forças cortantes) e o momento fletor atuam sobre uma viga e tanto estes esforços como o momento estão contidos num mesmo plano, denominado plano das forças ou plano de flexão. Quando só atua momento fletor, nas diversas seções transversais, diz-se que a sollicitação é de flexão pura [Nash, 1982].

De um modo geral, pode-se definir o momento fletor como a somatória dos momentos de todas as forças situadas em um só lado da seção (a direita ou a esquerda) tomados em relação ao centro de gravidade desta seção, figura 4.1.

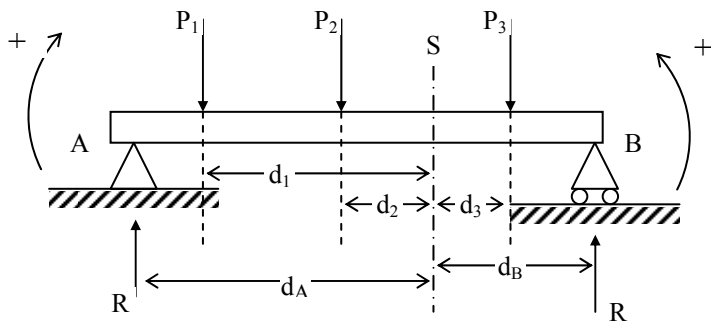


Figura 4.1 Momento fletor

O momento fletor em relação a S, será:

$$M_S = R_A d_A - P_1 d_1 - P_2 d_2,$$

cargas ou forças a esquerda,

$$M_S = R_B d_B - P_3 d_3,$$

cargas ou forças a direita.

cargas ou forças a

(4.1)

É de conveniência imaginar que a viga seja formada por um número infinito de fibras. Deste modo, a viga da figura 4.1 vai fletir, encurvando-se para baixo; as fibras da parte inferior serão alongadas (tensão de tração) e as da parte superior, comprimidas (tensão de compressão), figura 4.2.

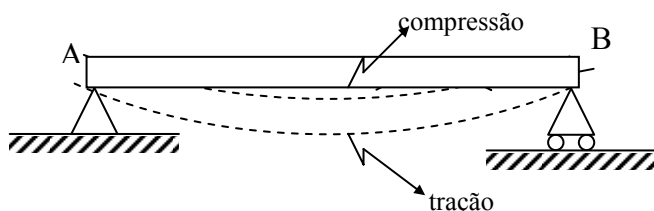


Figura 4.2 Viga simplesmente apoiada

4.1 Considerações Básicas

As seções transversais inicialmente planas, permanecem planas durante a flexão (hipótese de Bernuilli).

Entre a borda comprimida e a borda tracionada existe uma camada cujas fibras não sofrem variação alguma de comprimento, portanto não estão sob tensão; a linha baricêntrica desta superfície (camada, plano) neutra é denominada de linha neutra. A linha neutra é a interseção do plano da seção transversal com o plano formado pelas camadas neutras, figura 4.3.

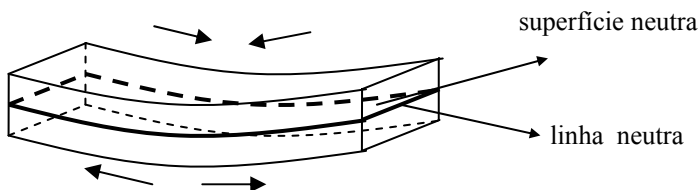


Figura 4.3 Superfície neutra

Na flexão simples a linha neutra passa pelo centro de gravidade da seção transversal.

A linha elástica é o eixo longitudinal da viga deformado, figura 4.4.

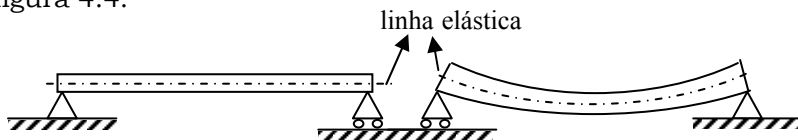


Figura 4.4 Linha elástica

4.2 Lei de Navier

A figura 4.5 mostra a barra AB flexionada. Adotando como origem do sistema de coordenadas um ponto O na superfície neutra e o arco JK localizado a uma distância y desta superfície [Beer and Johnston, 1989].

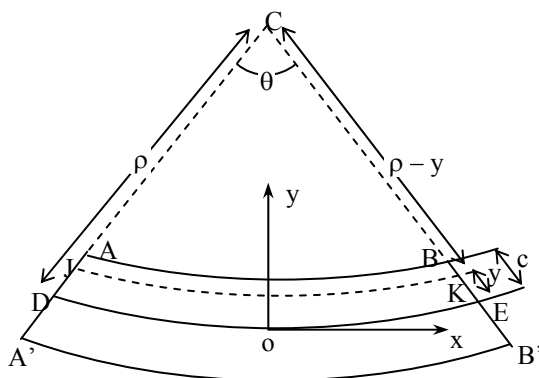


Figura 4.5 Flexão

Da figura 4.5 tem-se que:

DE = superfície neutra,

ρ = raio do arco da circunferência DE,

θ = ângulo central correspondente ao arco DE.

O comprimento DE é igual ao comprimento L da barra indeformada, então:

$$L = \rho.\theta . \quad (4.2)$$

Agora, considerando um arco JK localizado a uma distância y da superfície neutra, e observa-se que seu comprimento é L', vem que:

$$L' = (\rho - y).\theta , \quad (4.3)$$

e então pode-se escrever que a deformação entre L e L' é:

$$\delta = L' - L, \quad (4.4)$$

e substituindo as equações 4.2 e 4.3 na equação 4.4 tem-se que:

$$\delta = (\rho - y).\theta - \rho.\theta = -y.\theta . \quad (4.5)$$

A deformação específica longitudinal ε_x nos elementos que compõem a fibra JK é dado por:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y.\theta}{\rho.\theta} ,$$

ou

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} . \quad (4.6)$$

O sinal negativo indica que a deformação é de compressão uma vez que adota-se o momento positivo, e a concavidade da barra deformada é voltada para cima. Então o valor da deformação específica dado pela equação 4.6 vale para qualquer ponto situado à distância y da superfície neutra. A deformação específica ε_x varia linearmente com a distância y à superfície neutra, ao longo da barra.

A maior deformação específica ε_x ocorre para o máximo valor de y e chamando de c (figura 4.5) esse valor máximo (que pode ser em relação à face superior ou inferior da barra), e expressando por ε_m o valor absoluto máximo da deformação específica, vem:

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} , \quad (c = y) \quad (4.7)$$

e fazendo $\rho = \frac{c}{\varepsilon_m}$, e substituindo na equação 4.6, resulta:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c} . \varepsilon_m \quad (4.8)$$

Agora, impondo a condição que as tensões na barra permaneçam abaixo dos limites de proporcionalidade e elasticidade do material, e que não vão ocorrer deformações permanentes, então a lei de Hooke pode ser aplicada para o estado uniaxial de tensões. Considerando que o material é homogêneo, vem que:

$$\sigma_x = E.\varepsilon_x \quad (4.9)$$

e multiplicando a equação 4.8 por E, tem-se que:

$$E.\varepsilon_x = \frac{-y}{c}.E.\varepsilon_m \quad ,$$

e pela equação 4.9, vem:

$$\sigma_x = \frac{-y}{c}.\sigma_m \quad , \quad (4.10)$$

onde σ_m expressa o maior valor absoluto da tensão (tensão máxima). A equação 4.10 mostra que, no regime elástico, a tensão normal varia linearmente com a distância à superfície neutra (Lei de Navier), figura 4.6

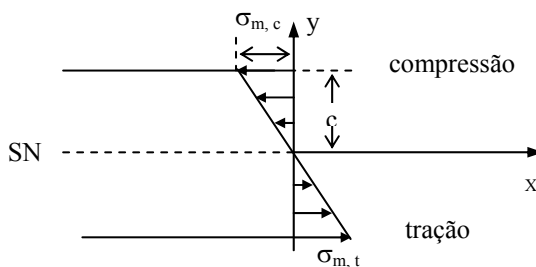


Figura 4.6 $\sigma_{m,t}$ x $\sigma_{m,c}$

É possível mostrar que:

$$\sigma_m = \frac{M.c}{I} \quad , \quad (4.11)$$

onde I é o momento de inércia da área da seção transversal em

relação à linha neutra

Relacionando as equações 4.10 e 4.11 vem:

$$\sigma_x = -\frac{M \cdot y}{I} \quad (4.12)$$

As equações 4.11 e 4.12 são conhecidas como fórmulas da flexão em regime elástico e a tensão normal σ_x , provocada quando a barra se flexiona, é chamada de tensão de flexão.

Pode-se verificar que a tensão é de compressão acima do eixo neutro ($\sigma_m < 0$, $y > 0$), quando M é positivo; sendo de tração quando o momento M é negativo.

A relação I/c , equação 4.11, só depende da geometria da seção transversal e é chamada de módulo ou momento resistente e é representado pela letra W , então:

$$W = \frac{I}{c} \quad , \quad (4.13)$$

que substituindo na equação 4.11, tem-se:

$$\sigma_m = \frac{M}{W} \quad . \quad (4.14)$$

Essa relação mostra que a tensão máxima é inversamente proporcional ao módulo resistente W , de modo que uma viga deve ser projetada com o maior valor de W possível, nas condições de cada problema.

A deformação da barra submetida à flexão é medida pela curvatura da superfície neutra. A curvatura é definida como o inverso do raio de curvatura ρ . Então da equação 4.7 vem:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{c} \quad (4.15)$$

mas em regime elástico, $\varepsilon_m = \sigma_m/E$ e a equação 4.15 torna-se:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{E \cdot c} = \frac{1}{E \cdot c} \cdot \frac{M \cdot c}{I} \quad ,$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I} \quad . \quad (4.16)$$

4.3 Casos de Flexão

Eixo de solicitação (ES)

É a interseção do plano do momento ou o plano das cargas com o plano da seção transversal, figura 4.7

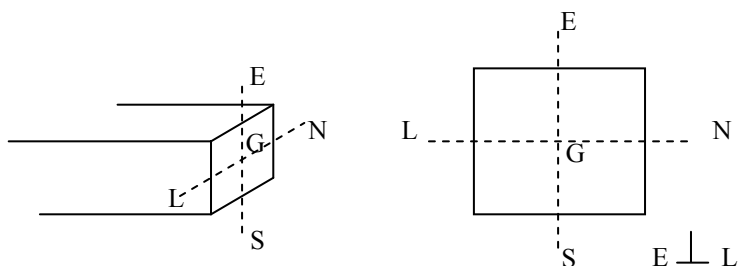


Figura 4.7 Eixo de solicitação

Flexão simples normal

É quando o eixo de solicitação coincide com um dos eixos centrais principais de inércia (e.c.p.i.) da seção transversal, figura 4.8.

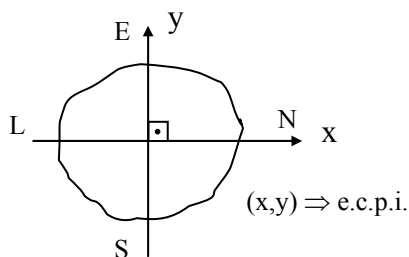


Figura 4.8 Flexão simples normal

Flexão simples oblíqua:

É quando o ES não coincide com os eixos centrais principais de inércia figura 4.9.

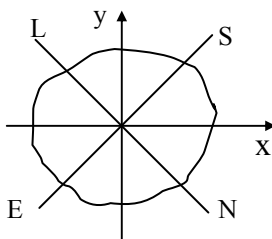


Figura 4.9 Flexão simples oblíqua

4.4 Momento de Inércia de uma Área: Raio de Giração

Considera-se a área A , figura 4.10, situada no plano xy e o elemento de área dA de coordenadas x e y . O momento de inércia da área A em relação tanto a x como a y , são dados respectivamente por:

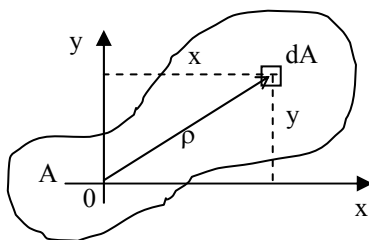


Figura 4.10 Momento de inércia de uma área

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA \quad , \quad (4.17)$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA \quad , \quad (4.18)$$

e essas integrais são chamadas de momentos de inércia retangulares, pois são calculadas em função de x e y e elas são, na realidade, integrais duplas. No entanto, é possível reduzir o problema ao cálculo de uma integral em uma variável, escolhendo para dA elementos na forma de faixas horizontais ou verticais.

Define-se momento de inércia polar da área A em relação ao ponto O como:

$$J_0 = \int_A \rho^2 \cdot dA \quad , \quad (4.19)$$

onde ρ é a distância do ponto O ao elemento dA .

Existe uma relação entre o momento de inércia polar J_0 de uma certa área e os momentos de inércia I_x , I_y dessa área. Então,

$$J_0 = \int_A \rho^2 . dA = \int_A (x^2 + y^2) . dA = \int_A x^2 . dA + \int_A y^2 . dA$$

$$J_0 = I_x + I_y \quad . \quad (4.20)$$

O raio de giração de uma área A em relação ao eixo x é dado por:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \Rightarrow I_x = r_x^2 . A \quad , \quad (4.21)$$

e de modo semelhante:

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \Rightarrow I_y = r_y^2 . A \quad , \quad (4.22)$$

e

$$r_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}} \Rightarrow J_0 = r_0^2 . A \quad . \quad (4.23)$$

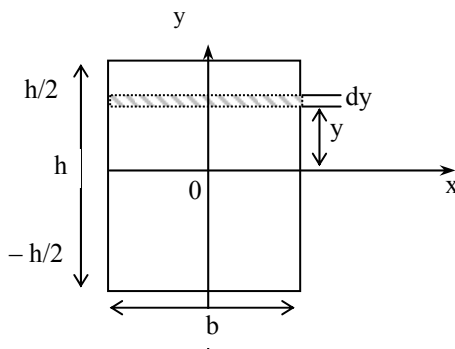
Substituindo I_x , I_y , J_0 em termos dos raios de giração na equação 4.20, encontra-se:

$$r_0^2 . A = r_x^2 . A + r_y^2 . A$$

$$r_0^2 = r_x^2 + r_y^2 \quad (4.24)$$

Exemplo 1

Determinar, para a área retangular o momento de inércia I_x em relação ao eixo x e o raio de giração r_x



Adota-se como elemento de área a faixa horizontal de largura b e espessura dy . O momento de inércia da faixa em relação a x é dado por:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot (b \cdot dy) = b \int_A y^2 \cdot dy ,$$

mas a integração é de: $y = -\frac{h}{2}$ e $y = +\frac{h}{2}$,

$$I_x = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot dy = \frac{b}{3} \left[y^3 \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right] ,$$

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 .$$

O raio de giração é dado por:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} ,$$

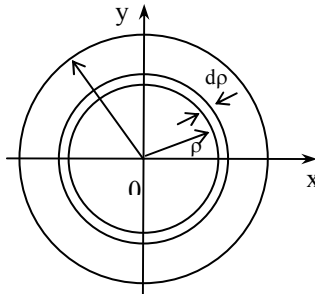
e substituindo I_x determinado acima nesta equação, encontra-

se:

$$r_x = \frac{h\sqrt{3}}{6} .$$

Exemplo 2

Determinar para a área circular, figura abaixo, o momento de inércia polar J_0 e os momentos inerciais I_x e I_y .



$$J_0 = \int_A \rho^2 . dA \Rightarrow dA = 2.\pi.\rho.d\rho ,$$

$$J_0 = \int_A \rho^2 (2.\pi.\rho.d\rho) = 2.\pi.\int_0^r \rho^3 . d\rho = \frac{2.\pi}{4} [\rho^4]_0^r = \frac{\pi.r^4}{2} .$$

Da equação 4.20, e devido a simetria da área circular ($I_x=I_y$), vem que:

$$J_0 = I_x + I_y = 2.I_x \Rightarrow I_x = \frac{J_0}{2} \Rightarrow I_x = I_y = \frac{\pi.r^4}{4} .$$

4.5 Momentos de Inércia das Figuras Planas

A figura 4.1 mostra o momento de inércia de algumas

figuras planas (Beer and Johnston, 1989).

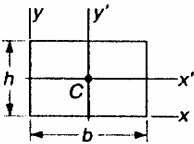
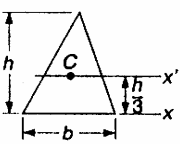
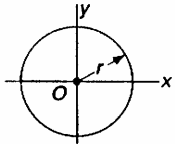
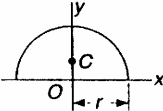
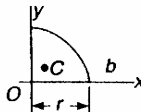
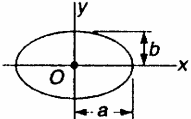
Retângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Quadrante		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

Figura 4.1 Momento de inércia de figuras planas

4.6 Tipos de Vigas

De um modo geral, as vigas podem ser classificadas em, figura 4.11 (Nash, 1982):

Viga em balanço ou engastada.

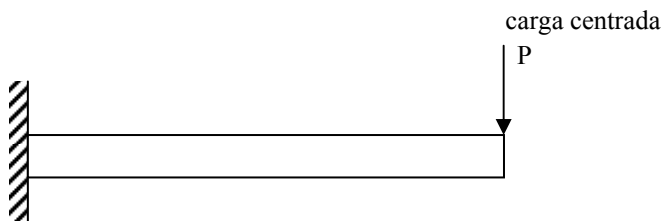


Figura 4.11.a Viga em balanço

Viga simples

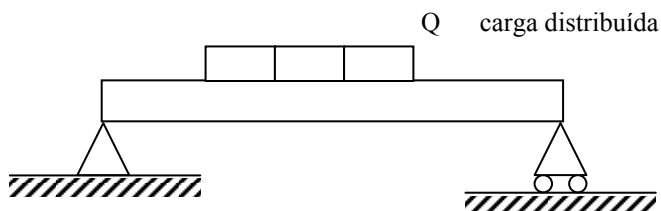


Figura 4.11.b Viga simples

Vigas simples com balanços

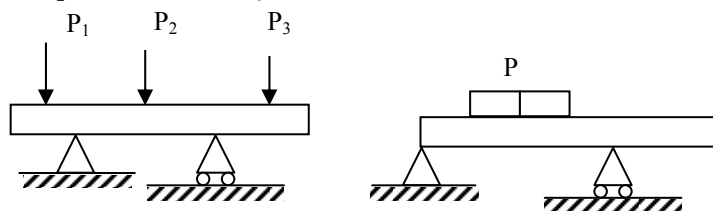


Figura 4.11.c Vigas simples com balanços

Viga apoiada engastada

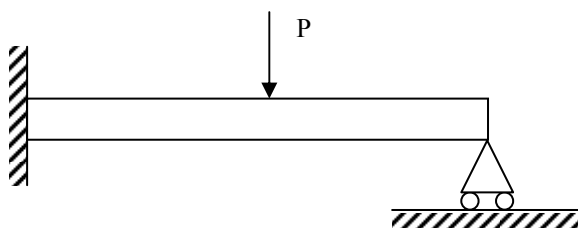


Figura 4.11.d Viga apoiada engastada

Viga engastada em ambas extremidades

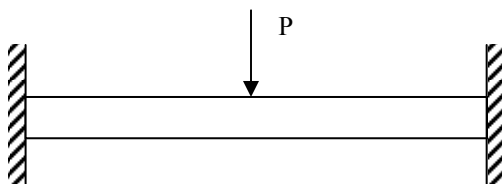


Figura 4.11.e Viga engastada em ambas extremidades

Viga continua

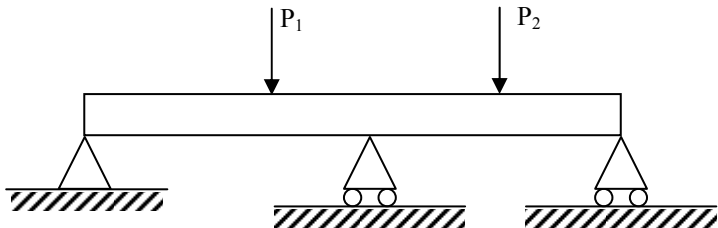
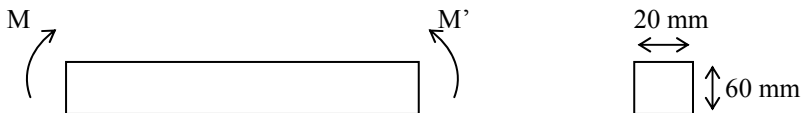


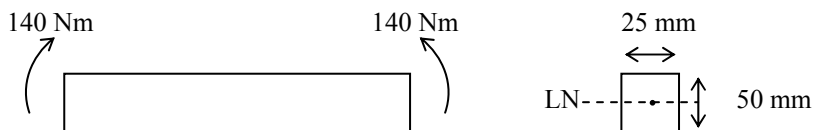
Figura 4.11.f Viga continua

Exercícios Propostos

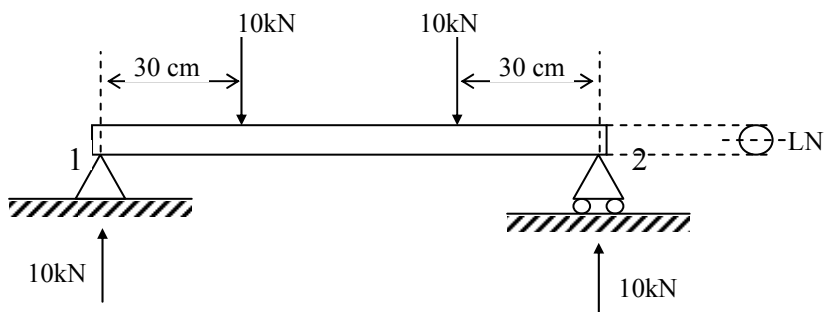
- 1) Uma barra de aço tem seção retangular de 20x60 mm e fica submetida à ação de dois conjugados iguais e de sentido contrário que agem em um plano vertical de simetria da barra, figura abaixo. Determinar o momento M . Dado: $\sigma_m = 250 \text{ MPa}$.



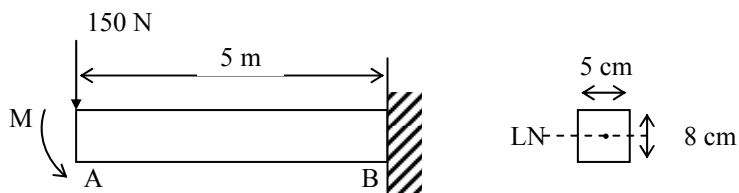
- 2) Uma viga está solicitada por um momento de 140 Nm como mostra a figura a seguir. Sua seção transversal é retangular de 25 x 50 mm. Determinar as tensões extremas devidas a flexão e indicar a variação das tensões ao longo da altura da viga.



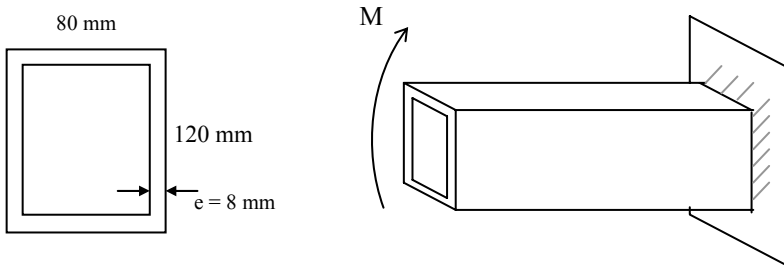
- 3) Uma viga de seção circular, de 20 cm de diâmetro, é simplesmente apoiada e suporta suas cargas de 10 kN dispostas como indica a figura abaixo. Determinar as tensões máximas.



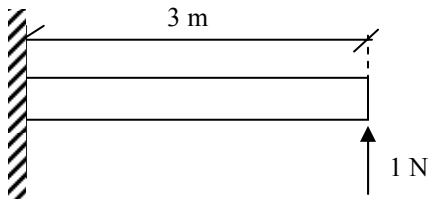
- 4) A figura abaixo, mostra uma viga engastada em uma das extremidades, com 5 m de comprimento, construída de aço e a seção transversal é retangular $5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$. Determinar a seção onde a tensão é máxima e o seu valor.



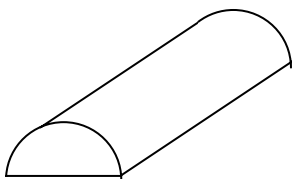
- 5) Um tubo retângular é fabricado por pressão, figura abaixo, de uma liga de alumínio para a qual $\sigma_e=150$ MPa, $\sigma_u=300$ MPa, $E= 70$ GPa. O tubo é engastado em uma de suas extremidades. Determinar : a) o momento fletor M para o qual o fator de segurança $FS=3,0$; b) o raio de curvatura correspondente no tubo.



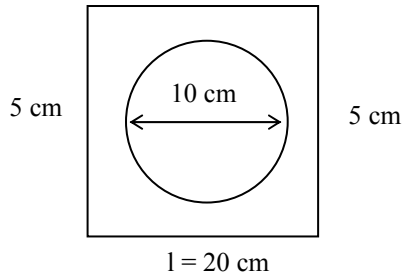
- 6) Determinar a razão entre os módulos de resistência a flexão de uma seção transversal quadrada e de uma seção transversal circular e ambas têm a mesma área.
- 7) Uma viga de seção retangular 20 cm x 30 cm suporta um momento fletor positivo de 2 kNm. A peça é construída com um material que apresenta $\sigma_u = 180$ N/cm² $\sigma_e= 320$ N/cm². Determinar o FS.
- 8) A viga da figura abaixo tem seção transversal quadrada de 12 cm de lado. É construída de material dúctil com $\sigma_u = 3,6$ N/cm². Calcular o fator de segurança.



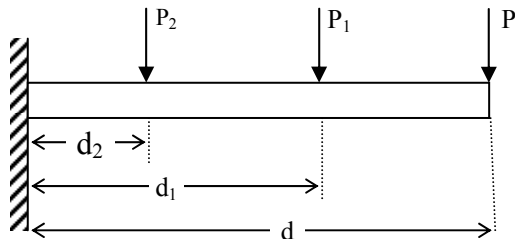
- 9) Um viga engastada em uma extremidade, tem 2,7 m de comprimento e seção transversal circular, está sob a ação de uma carga de 4 kN em sua extremidade livre. O material é de aço e a tensão admissível é 1440 N/cm^2 . Determinar o diâmetro da barra.
- 10) Determinar, como é mais vantajoso dispor uma viga de seção transversal quadrada para resistir a flexão:
- a) de tal maneira que o plano de atuação do momento fletor contenha um dos lados;
 - b) de tal maneira que o plano de atuação do momento fletor contenha uma das diagonais.
- 11) Uma barra de alumínio tem seção transversal em forma de um semicírculo, com $r = 12 \text{ mm}$. A barra é flexionada até se deformar em um arco de circunferência de raio médio $\rho = 2,5 \text{ m}$. A face curva da barra fica voltada para o centro de curvatura do arco, determinar a tensão máxima de tração e de compressão da barra. Adotar $E = 70 \text{ GPa}$.



- 12) Calcular o fator de segurança para seção transversal da figura a seguir, submetida a um momento fletor de 10 kNm. Dado: $\sigma_u = 3200 \text{ N/cm}^2$.



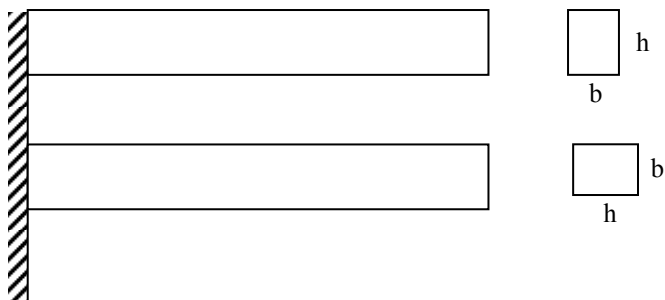
- 13) Uma viga de madeira, está solicitada pelas cargas $P = 50 \text{ N}$, $P_1 = 80 \text{ N}$, $P_2 = 00\text{N}$, que atuam às distâncias $d = 3 \text{ m}$, $d_1 = 2 \text{ m}$ e $d_2 = 1\text{m}$, do engastamento. A tensão admissível é 43 N/cm^2 e a seção transversal é retangular. Determinar as dimensões da seção, sabendo-se que a relação da base para a altura é $5/7$.



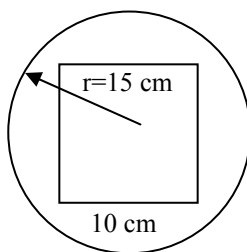
- 14) Uma viga de madeira com 3 m de comprimento e seção retangular de 20 cm x 28cm está engastada em uma de suas extremidades e livre na outra. Determinar a carga P que pode

atuar no extremo livre da viga, com a devida segurança, sendo a tensão admissível igual a 44 kgf/cm^2 , nas seguintes condições:

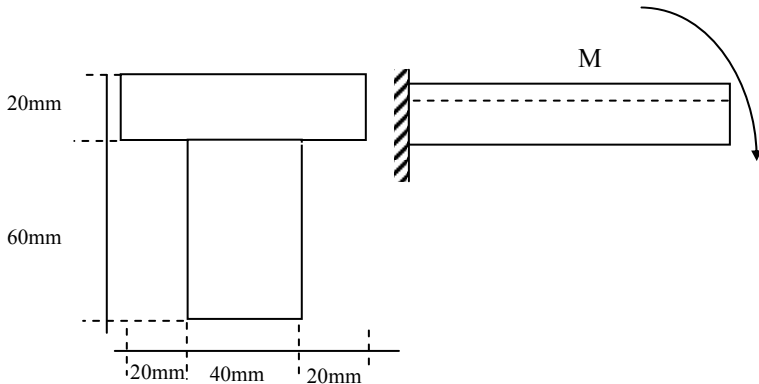
- a) com a altura h vertical;
- b) com a altura h horizontal.



- 15) Calcular o fator de segurança para a seção transversal, da figura abaixo, submetida a um momento fletor de 10 kNm , sendo $\sigma_u = 4,6 \times 10^2 \text{ N/cm}^2$.



- 16) A viga, conforme a figura a seguir, está submetida a um momento fletor de 3 kNm, e a seção transversal é em forma de T . Determinar: a) as máximas tensões de tração e compressão; b) o raio de curvatura. Dado: $E = 165 \text{ GPa}$



Respostas dos Exercícios Propostos

- 1- 3 kNm.
- 2- $1344 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ (tração); $-1344 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ (compressão).
- 3- $3,82 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ (tração); $-3,82 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ (compressão).
- 4- No engastamento; $1,406 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ (tração); $-1,406 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ (compressão).
- 5- 9,2 kNm; 42 m.
- 6- $\frac{2}{3}\sqrt{\pi}$.
- 7- 2,7.
- 8- 3,46.
- 9- 19,7 cm.
- 10- $w_a = w_b \sqrt{2}$; situação (a) é mais vantajosa.
- 11- 193 MPa; 142 MPa.

12- 4,11.

13- 14,3 cm; 20 cm.

14- 383,3 kgf; 273,8 kgf.

15- 1,2.

16- $44,2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ (tração); $-59,7 \times 10^6 \text{ N/m}^2$; 127,1 m.