6. Flambagem

Nos capítulos anteriores duas foram as preocupações principais:

a) resistência da estrutura, ou seja, a sua capacidade para suportar um certo carregamento, sem ocorrer tensões excessivas no material;

b) a capacidade da estrutura para suportar um determinado carregamento, se sofrer deformações inaceitáveis.

Deste modo, neste capitulo será destinado ao estudo da estabilidade da estrutura isto é, sua capacidade para suportar, uma dada carga, sem sofrer uma brusca mudança em sua configuração. O principal objetivo deste capitulo será a análise de colunas quando submetidas a cargas axiais e um breve comentário sobre cargas excêntricas.

6.1 Definição

Flambagem é o fenômeno que ocorre quando uma carga axial de compressão atuando em uma barra ocasiona uma flexão lateral na direção do raio de giração mínimo de sua seção transversal, rompendo a peça com uma carga menor que a carga de ruptura à compressão simples, figura 6.1.

Figura 6.1 Flambagem

6.2 Estudos da Flambagem

Supondo que as colunas em estudo sejam perfeitamente retilíneas, elásticas, com carregamento centrado, isto é, colunas ideais, pode-se dizer que P_{cr} representa a capacidade de carga critica (última) desta coluna para que a mesma não sofra ação de flambagem. Em outras palavras, está se tratando de uma situação de equilíbrio, isto é:

- equilíbrio estável $\Rightarrow P < P_{cr}$;
- equilíbrio indiferente $\Rightarrow P = P_{cr}$;
- equilíbrio instável $\Rightarrow P > P_{cr}$.

Deste modo, quer se determinar o valor crítico da carga P, isto é, o valor P_{cr} , para o qual a situação indicada na figura 6.2a, deixa de ser estável. Se $P>P_{cr}$, o menor desalinhamento ou perturbação provoca a flambagem da coluna, que assume a configuração deformada da figura 6.2b. Estas figuras representam colunas com extremidades articuladas[Beer and Johnston, 1989].

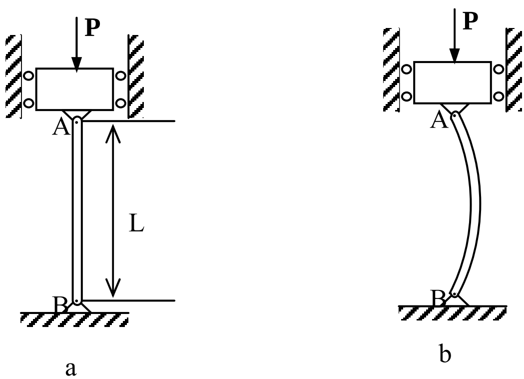

Figura 6.2 Colunas com extremidades articuladas

O valor da carga crítica P_{cr} foi definida pelo estudo de Euler e depende do tipo de material, da seção transversal e do comprimento da coluna, e é dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2.E.I}{L^2}, \qquad (6.1)$$

e esta expressão é conhecida como fórmula de Euler.

No caso de colunas com seção transversal quadrada ou circular, o momento de inércia I desta seção em relação a qualquer eixo centroidal é o mesmo, de modo que a coluna pode flambar em qualquer plano, dependendo apenas de restrições que possam ser colocadas pelas ligações das extremidades. Para seções transversais de outras formas, a carga crítica deve ser calculada para $I=I_{min}$ a ser adotado na equação 6.1. Se a flambagem ocorrer, ela acontecerá em um plano perpendicular ao eixo principal de inércia correspondente.

O valor da tensão corresponderá à carga crítica e chamada tensão crítica, representada por σ_{cr}.

Fazendo $I=A.r^2$, onde A é a área da seção transversal e r o raio de giração, tem-se que:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2.E.I}{L^2.\dfrac{I}{r^2}},$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2.E}{(L/r)^2}, \qquad (6.2)$$

e a relação L/r é chamada índice de esbeltez da coluna. Deve-se usar o valor mínimo do raio de giração r na determinação do índice de esbeltez e da tensão crítica de uma coluna. Este índice é uma característica da viga considerada, pois depende basicamente do tipo de seção e do seu momento de inércia; é também representado por λ, isto é, $\lambda = L/r$.

6.3 Limitação da Fórmula de Euler

O módulo de elasticidade E foi utilizado na dedução da fórmula de Euler de modo que todo o raciocínio apresentado anteriormente é aplicável enquanto o comportamento do material se conserva linearmente elástico (Lei de Hooke), figura 6.3. Para sair desta limitação, a equação de Euler será escrita de uma forma diferente.

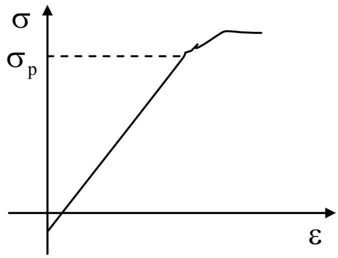

Figura 6.3 σ x ε

Então:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2.E}{\lambda^2} \leq \sigma_p \Rightarrow \lambda \geq \pi.\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}, \qquad (6.3)$$

na igualdade: $\sigma_{cr} = \sigma_p \Rightarrow \lambda = \lambda_{lim}$

$$\lambda_{lim} = \pi.\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}, \qquad (6.4)$$

logo, a fórmula de Euler é válida para, figura 6.4.

$$\lambda = \frac{L}{r_{min}} \geq \lambda_{lim}, \qquad (6.5)$$

sendo r_{min} raio de giração mínimo. O raio de giração é sempre perpendicular ao eixo em relação ao qual o momento de inércia I é calculado.

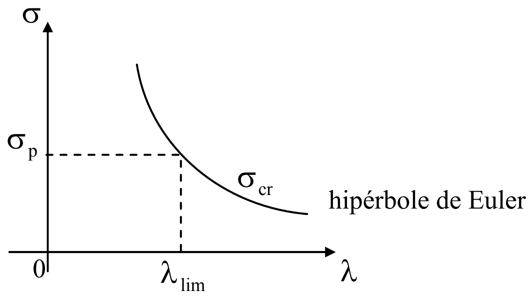

Figura 6.4 σ x λ

Da figura 6.4 vem que:

- quando $\lambda < \lambda_{lim} \Rightarrow$ peças curtas,
- quando $\lambda \geq \lambda_{lim} \Rightarrow$ peças longas.

No estudo de Euler, foi suposto uma peça em condições ideais, com carga perfeitamente centrada, eixo longitudinal retilíneo e feita de material homogêneo, sendo portanto, um estudo teórico.

6.4 Estudo Empírico

O fato dos materiais usuais não serem perfeitamente homogêneos em todos os sentidos, aceita-se esta imperfeição, procurando removê-la por meio de coeficientes (fatores) de segurança, fornecidos por ensaios. No Laboratório da Politécnica de Zürich, Tetmajer estabeleceu para os limites aquém dos de Euler, a fórmula empírica, conhecida como fórmula de Tetmajer [Lacerda, 1964].

Então:

$$\sigma_{cr} = K - H\lambda, \tag{6.6}$$

onde K, H são constantes do material, por exemplo, mostrados na tabela 6.1

Tabela 6.1 Constantes de alguns materiais

Material	E (kgf/cm^2)	σ_p(kgf/cm^2)	K(kgf/cm^2)	H(kgf/cm^2)
Aço de construção	$1{,}96\text{x}10^6$	1600	3030	12,6
Aço doce	$2{,}1\ \text{x}10^6$	1900	3100	11,4
Madeira (pinho)	$0{,}8\ \text{x}10^5$	80	293	1,94
Ferro fundido	$1{,}05\ \text{x}10^6$	1000	7700	6,2

A figura 6.5 mostra os limites para o emprego da fórmula de Tetmajer.

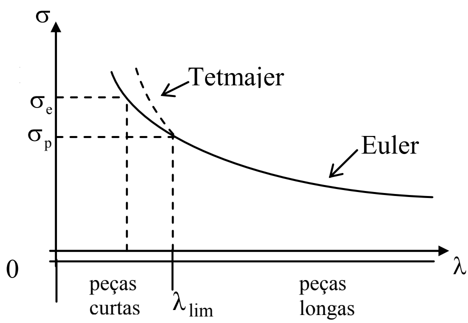

Figura 6.5 Limites para o emprego da fórmula de Tetmajer

Então, quando:

$\lambda \geq \lambda_{lim} \Rightarrow$ Euler : $$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2.E}{\lambda^2},$$

$\lambda < \lambda_{lim} \Rightarrow$ Tetmajer : $$\sigma_{cr} = K - H.\lambda$$

Quando as peças são muito curtas, não há flambagem.

6.5 Roteiro das Condições de Segurança

a) Calcula-se o índice de esbeltez da peça: $\lambda = \dfrac{L}{r_{min}}$;

b) Calcula-se o índice de esbeltez limite: $\lambda_{lim} = \pi\sqrt{\dfrac{E}{\sigma_p}}$;

c) Calcula-se a carga crítica:
se $\lambda \geq \lambda_{lim} \Rightarrow$ Euler : equação 6.2,
se $\lambda < \lambda_{lim} \Rightarrow$ Tatmajer : equação 6.6;

d) Tensão admissível a flambagem: $\bar{\sigma}_{fl} = \dfrac{\sigma_{cr}}{FS}$;

e) Verificação das tensões de serviço: $\sigma = \dfrac{P}{A} \leq \bar{\sigma}_{fl}$.

6.6 Comprimentos de Flambagem. Fórmula de Euler

A equação 6.1 foi deduzida para o caso de uma coluna com as duas extremidades articuladas. No caso de uma coluna com uma extremidade livre A, onde se aplica uma carga P, e outra extremidade B engastada, figura 6.6a, observa-se que a coluna se comporta como a parte de uma coluna com extremidades articuladas, a figura 6.6b e carga crítica tanto para a coluna da figura 6.6a como para a coluna 6.6b é a mesma e é obtida pela equação 6.1, usando um comprimento para a coluna igual ao dobro do comprimento L real, isto é, L_e=2.L, onde L_e é o comprimento efetivo de flambagem.

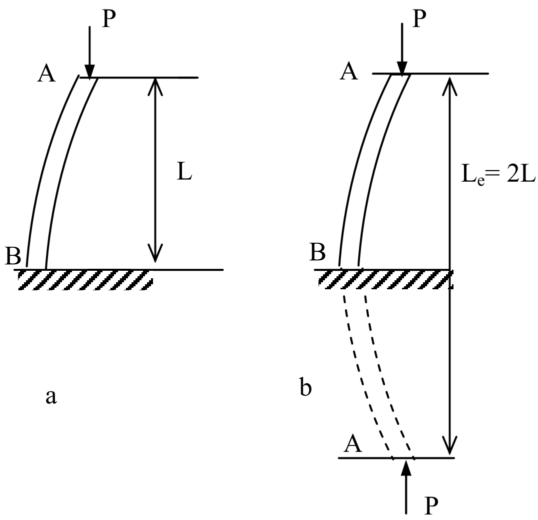

Figura 6.6 Colunas com extremidades livre e engastada

Então a carga crítica é dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2.E.I}{L_e^2}, \tag{6.7}$$

e a tensão crítica,

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e / r_{min})^2}, \tag{6.8}$$

e a relação L_e / r_{min} é o índice efetivo de esbeltez da coluna, e no caso considerado, é igual a $2L / r_{min}$.

A figura 6.7 mostra vários casos de condição das extremidades e os correspondentes comprimentos equivalentes.

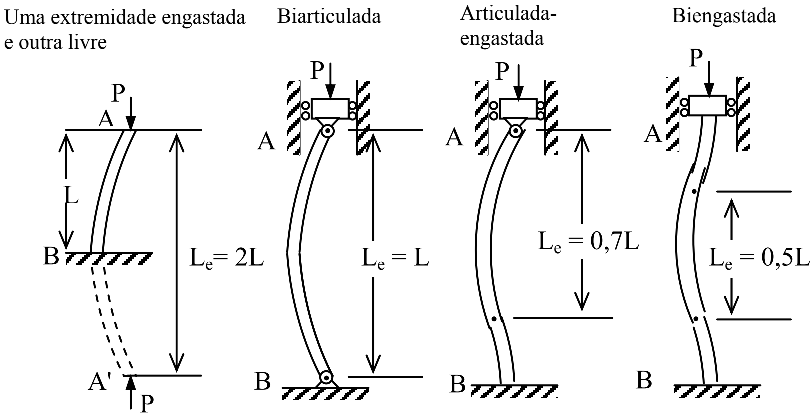

Figura 6.7 Comprimentos efetivos de flambagem

6.7 Carga Excêntrica. Fórmula da Secante

Será analisado nesta seção o problema da flambagem de colunas de um outro modo, levando em consideração que a força $\vec{P}$ aplicada sobre ela não é perfeitamente centrada. Representado por "e" a excentricidade da carga, isto é, a distância entre a linha de ação de $\vec{P}$ e o eixo da coluna, figura 6.8a. Substituindo a carga excêntrica por uma carga centrada P e um conjugado M_A de momento igual a M_A=P.e, figura 6.8b.

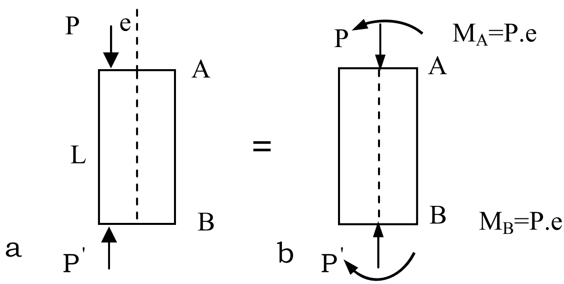

Figura 6.8 Carga excêntrica

Por menor que sejam a carga P e a excentricidade "e", o conjugado M_A sempre irá provocar uma deflexão na coluna, figura 6.9. Se a carga excêntrica aumentar, também aumentarão a carga centrada P e o conjugado M_A, o que provoca uma majoração da flexão da coluna. Analisando desta maneira, o problema da flambagem não é mais uma questão de se determinar até que ponto uma coluna se mantém reta e estável sob ação de uma carga crescente, mais sim uma questão de se determinar até que ponto se pode permitir a majoração da flexão pelo aumento da carga, sem exceder a tensão admissível ou a deflexão y_{max} permitida.

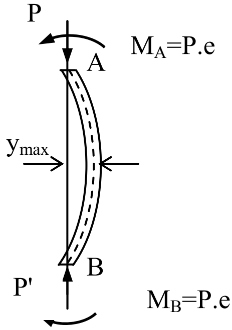

Figura 6.9 Deflexão da Coluna

É possível mostrar que a deflexão máxima é dada por:

$$y_{max} = e\left[\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1\right], \qquad (6.9)$$

onde P_{cr} é dado pela equação 6.1

A tensão máxima σ_{max} ocorre na seção da coluna em que atua o maior momento fletor, isto é, na transversal que passa pelo ponto C, figura 6.10.

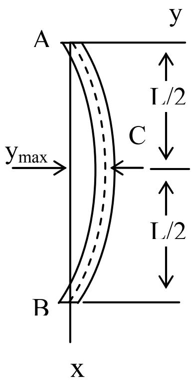

Figura 6.10 Deflexão máxima

Essa tensão é obtida pela soma da tensão normal devida à força axial e da tensão devido ao momento fletor que agem naquela seção (ver Seção 4.2, equação 4.11). Então:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}.c}{I}, \tag{6.10}$$

e após sucessivas manipulações algébricas, vem que:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e.c}{r^2}.\sec\left(\sqrt{\frac{P}{E.I}}.\frac{L}{2}\right)\right]. \tag{6.11}$$

Um outro modo de calcular σ_{max} é dado por:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e.c}{r^2}.\sec\frac{\pi}{2}.\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right]. \tag{6.12}$$

A equação 6.12 pode ser usada em qualquer caso de condição de apoio, desde que se aplique a expressão apropriada para a carga crítica.

Na equação 6.11, fazendo $I=A.r^2$ e resolvendo a equação em relação a P/A, tem-se que:

$$\frac{P}{A}=\frac{\sigma_{max}}{1+\frac{e.c}{r^2}.\sec\left[\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{P}{E.A}}.\frac{L_e}{r}\right]}, \qquad (6.13)$$

onde o comprimento efetivo de flambagem é usado para a equação aplicável para quaisquer condições de extremidades. Esta fórmula é conhecida como fórmula da secante e é uma equação transcendente em P/A, pois aparece nos dois termos e é resolvida por métodos iterativos.

Para valores pequenos de L_e/r, a secante é aproximadamente igual a 1 e a equação 6.13 pode ser escrita na forma:

$$\frac{P}{A}=\frac{\sigma_{max}}{1+\frac{e.c}{r^2}}. \qquad (6.14)$$

6.8 Considerações

Uma coluna que flamba sob o carregamento especificado no cálculo não está dimensionada corretamente.

Barras submetidas à compressão axial, ao mesmo tempo que suportam cargas laterais, são chamadas vigas-colunas.

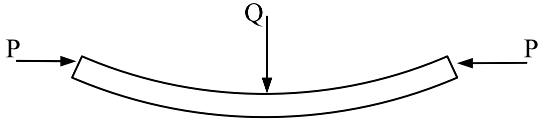

Figura 6.11 Viga- coluna

Devido a carga Q a barra sempre flexiona lateralmente, independente do valor de P.

O índice de esbeltez é usado como medida de fraqueza de uma coluna. Então, quanto maior for o raio de giração mais resistente será a coluna.

Exercícios Propostos

1) Determinar o índice de esbeltez de uma barra de madeira de 8 m de comprimento e seção retangular de 20x25 cm. Considerar engastada em ambas as extremidades.

2) Uma barra quadrada de 25 cm de lado e 800 cm de comprimento, apresenta módulo de elasticidade $2x10^4$ N/mm^2. Calcular a carga crítica de Euler para a barra engastada em uma extremidade e livre na outra.

3) Calcular com coeficiente de segurança igual a 3, a carga admissível de uma coluna oca de aço doce, sendo o raio externo R = 5 cm e o interno r = 3 cm, admitindo os quatro casos fundamentais.
   Dados : $E = 2,15 \times 10^{10}$ kgf/m^2; $\sigma_p = 1900 \times 10^4$ kgf/m^2; L = 4 m; $K = 3100 \times 10^4$ kgf/m^2; $H = 11,4 \times 10^4$ kgf/m^2.

4) Uma coluna oca de ferro fundido tem como raio externo R = 6 cm e altura L = 6,0 m. Qual o raio interno r para que seja aplicável a fórmula de Euler, sendo a coluna articulada nos extremos.
   Dados: $E = 2,1 \times 10^6$ kgf/cm^2; $\sigma_p = 1000$ kgf/cm^2.

5) Uma barra prismática de aço, com seção transversal retangular, de 4 cm x 5 cm é articulada nas extremidades e está submetida a uma carga axial de compressão. Sendo de 2.300 N/cm^2 o limite de proporcionalidade do aço e $E = 2,1 \times 10^6$ N/cm^2, determinar o comprimento mínimo, L, para a aplicação da fórmula de Euler.

6) Admitindo que a barra do problema 5 tenha o comprimento de 180 cm, qual a carga de flambagem.

7) Uma barra de aço de seção transversal retangular de 2,5 cm x 5,0 cm e tendo articulação nas duas extremidades, é comprimida axialmente. Determinar:
a) o comprimento mínimo para que a tensão crítica, segundo a equação de Euler, possa ser aplicada, sabendo que E = 21 x 10^5N/cm^2 e σ_p = 2100 N/cm^2.
b) a tensão crítica quando o comprimento da barra for 1,5 m.

8) Uma coluna de extremidades articuladas tem seção transversal quadrada e 2 m de comprimento. Ela é constituída de uma qualidade de pinho para a qual E = 13 GPa, $\overline{\sigma}$ =12MPa para compressão. Usando um coeficiente de segurança 2,5 no cálculo da carga crítica de Euler para a flambagem, determinar a dimensão da seção transversal, de modo que a coluna possa resistir com segurança a:
a) uma força de 100 kN;
b) uma força de 200 kN.

9) Uma coluna vazada de ferro fundido, com 5 m de altura, engastada rigidamente na base, suporta na extremidade livre uma carga admissível de 5000 kgf. A relação entre os diâmetros externo e interno é 2. Determinar estes diâmetros e verificar se os resultados são válidos para utilizar a equação de Euler. Dados: E = 2 x 10^6 kgf/cm^2; σ_p = 2000 kgf/cm^2; FS = 8.

Respostas dos Exercícios Propostos

1- 69,2.
2- 2,51x10^5 N.
3- 4,67x10^3 kgf; 1,87x10^4 kgf; 3,36x10^4 kgf; 3,88x10^4 kgf.
4- 5,8 cm.
5- 110,12 cm.
6- 17080 N.
7- 71,5 cm; 4,78x10^6 N/m^2.
8- 98,3 mm (dimensão aceitável); 116,9 mm (dimensão não aceitável).
9- 7,24 cm; 14,49 cm.