



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA
DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

AJUSTAMENTO de OBSERVAÇÕES – GA751

Prof. Alvaro Muriel Lima Machado

1

Lei de Propagação das Covariâncias

Consideremos duas v.a. multidimensionais Y e X, ligadas por um modelo linear

$$Y = G X + C$$

Aplicando o operador E{ } a ambos os membros

$$E\{Y\} = E\{GX + C\} = GE\{X\} + C$$

mas $\Sigma_Y = E\{(Y - U_Y)(Y - U_Y)^T\}$

$$\Sigma_Y = E\{(GX + C - GE\{X\} - C)(GX + C - GE\{X\} - C)^T\}$$

$$\Sigma_Y = E\{(GX - GE\{X\})(GX - GE\{X\})^T\} = E\{(GX - GU_X)(GX - GU_X)^T\}$$

$$\Sigma_Y = E\{G(X - U_X)(X - U_X)^T G^T\}$$

$$\Sigma_Y = GE\{(X - U_X)(X - U_X)^T\} G^T$$

$$\Sigma_Y = G \Sigma_X G^T$$

a) Somando uma constante a uma v.a., a sua variância não se altera.
b) Multiplicando uma v.a. por uma constante, a sua variância fica multiplicada pelo quadrado da constante.

2

Exercícios

Calcular a variância de y nos casos abaixo:

a) $y = \pm x$

b) $y = ax + b$

c) $y = x_1 + x_2$ com $\Sigma_X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $y = x_1 + x_2$ com $\Sigma_X = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$

3

Exercícios

Calcular a variância de y nos casos abaixo:

e) $y = x_1 + x_2$ com $\Sigma_x = \begin{bmatrix} 2 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}$

f) $y = x_1 - x_2 + 5$ com $\Sigma_x = \begin{bmatrix} 2 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}$

4

Exercícios

Calcular a variância de y nos casos abaixo:

g) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 + 3x_2 \end{cases}$ com $\Sigma_x = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_{x_1}^2 = 3; \sigma_{x_2}^2 = 3$

h) $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 - x_3 \end{cases}$ com $\Sigma_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5

Exercícios

As direções D_i abaixo foram observadas com a mesma variância $\sigma^2 = 3^{(2)}$ e sem correlação. Calcular o coeficiente de correlação entre os ângulos $(A_1 \text{ e } A_2)$, $(A_1 \text{ e } A_3)$, $(A_1 \text{ e } A_4)$.

O modelo matemático que liga as direções aos ângulos é linear:

$$\begin{cases} A_1 = D_2 - D_1 \\ A_2 = D_3 - D_1 \\ A_3 = D_4 - D_1 \\ A_4 = D_4 - D_3 \end{cases}$$

6

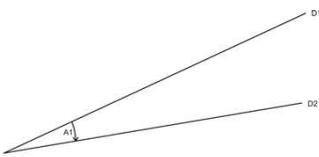
Exercícios

Resposta:

7

Exercícios

Dada uma estação total TC407 (leituras com precisão de 7") presente no laboratório de Topografia, determinar a precisão de um ângulo qualquer medido com a mesma (supondo apenas o erro na leitura).



8

Exercícios para se resolver na sala de aula

1) Um engenheiro cartógrafo mediu duas vezes uma certa distância usando trenas diferentes. Dadas as observações abaixo, qual o valor da distância medida e qual a sua precisão?

Observação (m)	Precisão (m)
32,750	0,010
32,760	0,005

2) Determine o erro estimado no comprimento do segmento AE que foi observado conforme as seções seguintes:

Seção	Comprimento(m)	Desvio padrão(m)
AB	824,53	±0,010
BC	2036,58	±0,023
CD	590,03	±0,008
DE	714,28	±0,009

9

Exercícios para se resolver na sala de aula

3) Um medidor eletrônico de distância (MED) tem precisão nominal igual a $3\text{mm} \pm 3\text{ppm}$. Qual é a precisão de uma medida de distância igual a 536,98m, feita com este equipamento?

4) Um terreno retangular foi medido com um MED (precisão nominal igual a $3\text{mm} \pm 5\text{ppm}$) obtendo-se 176,05m x 28,20m. Calcular o perímetro do terreno e a precisão associada.

5) Com o nível instalado com altura de $1,600 \pm 0,005\text{m}$, num ponto estação de cota $500,000 \pm 0,002\text{m}$, visou-se um ponto P, obtendo-se as seguintes leituras na mira: 2,222m; 1,420m e 0,618m. Sabendo-se que a precisão da leitura na mira é de 1mm, qual a cota/precisão do ponto P?

10

Exercícios

1) Um engenheiro cartógrafo mediu duas vezes uma certa distância usando trenas diferentes. Dadas as observações abaixo, qual o valor da distância medida e qual a sua precisão?

Observação (m)	Precisão (m)
32,750	0,010
32,760	0,005

11

Exercícios

Um engenheiro cartógrafo mediu duas vezes uma certa distância usando trenas diferentes. Dadas as observações abaixo, qual o valor da distância medida e qual a sua precisão?

Observação (m)	Precisão (m)
x_1	σ_{x_1}
x_2	σ_{x_2}

$$y = ax_1 + bx_2$$

12

Exercícios

...se as covariâncias não forem iguais a zero... $y = ax_1 + bx_2$

13

Exercícios

2) Determine o erro estimado no comprimento do segmento AE que foi observado conforme as seções seguintes:

Seção	Comprimento(m)	Desvio padrão(m)
AB	824,53	±0,010
BC	2036,58	±0,023
CD	590,03	±0,008
DE	714,28	±0,009

14

Exercícios

15

 Exercícios

3) Um medidor eletrônico de distância (MED) tem precisão nominal igual a $3\text{mm} \pm 3\text{ppm}$. Qual é a precisão de uma medida de distância igual a 536,98m, feita com este equipamento?

16

 Exercícios

4) Um terreno retangular foi medido com um MED (precisão nominal igual a $3\text{mm} \pm 5\text{ppm}$) obtendo-se 176,05m x 28,20m. Calcular o perímetro do terreno e a precisão associada.

17

 Exercícios

4) Um terreno retangular foi medido com um MED (precisão nominal igual a $3\text{mm} \pm 5\text{ppm}$) obtendo-se 176,05m x 28,20m. Calcular o perímetro do terreno e a precisão associada.

18

Exercícios

5) Com o nível instalado com altura de $1,600 \pm 0,005\text{m}$, num ponto estação de cota $500,000 \pm 0,002\text{m}$, visou-se um ponto P, obtendo-se as seguintes leituras na mira: 2,222m; 1,420m e 0,618m. Sabendo-se que a precisão da leitura na mira é de 1mm, qual a cota/precisão do ponto P?

$$H_E + h_i = H_P + \frac{L_I + L_M + L_S}{3}$$

19

Exercícios

Dado o modelo $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$ e sabendo-se que as componentes de Y tem variância igual a $3''$ e covariância igual a $1''$, calcular a MVC de $z = x_1 + x_2$.

20

Ajustamento

Resolvendo o sistema de equações lineares:

21

Exercícios

22

Exercícios

...resolvendo matricialmente...

23

Lei de Propagação das Covariâncias

A fórmula de propagação de covariâncias para modelos lineares pode ser generalizada para o caso de dependência não linear.

Seja o modelo não linear: $Y = F(X)$

Usando o desenvolvimento por Taylor, tem-se:

$$Y = F(X) \cong F(X_0) + \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X=X_0} (X - X_0)$$

Procedimento análogo ao anterior conduz à lei de propagação das covariâncias

$$\Sigma_Y = D \Sigma_X D^T$$

24

Lei de Propagação das Covariâncias

$$\Sigma_y = D \Sigma_x D^T$$

onde

$$D = \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X=X_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{X=X_0}$$

25

Série de Taylor em forma matricial

A série de Taylor nos proporciona o valor de uma função $f(t)$ no ponto $t = x$ quando conhecemos o valor da função para $t = a$.

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

Para valores de x próximos de a as potências igual e superiores à segunda podem, em muitos casos práticos, ser desprezadas, isto é, nas proximidades de a a curva $f(t)$ pode ser substituída por uma reta.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

26

Série de Taylor em forma matricial

$$F(X) = F(X_0) + \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X=X_0} * \Delta X$$

$$\frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X=X_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{X=X_0}$$

27

Exercícios

São dadas as coordenadas planas ajustadas de dois vértices de uma poligonal:

	A	B
X	10,00m	1000,00m
Y	10,00m	1000,00m

e a correspondente MVC $\rightarrow \Sigma_{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} m^2$

Estimar a variância da distância (d) entre os dois pontos.

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,00 \\ 10,00 \\ 1000,00 \\ 1000,00 \end{bmatrix}$$

28

Exercícios

29

Exercícios: Solução com FreeMat

30

Exercícios

Um terreno retangular teve suas dimensões medidas conforme tabela abaixo. Estimar a área e o desvio padrão.

Comprimento (m)	Largura (m)
65,321	12,496
65,330	12,501
65,326	12,499
65,328	12,495
65,327	12,498
65,323	12,495

a) Modelo matemático
 $Area = C * L$

31

Exercícios

b) Estimativa das dimensões e precisões
 Comprimento médio =
 Largura média =
 Desvio padrão da média do Comprimento =
 Desvio padrão da média da Largura =

c) Cálculo da Área
 Área =

d) Propagação de covariâncias

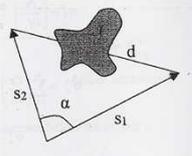
32

Exercícios: Solução com FreeMat

33

Exercícios

Na figura abaixo, a distância d não pode ser medida diretamente, mas pode-se medir s_1 , s_2 e α . Estimar d e o seu desvio-padrão.



Medidas	Desvio-padrão
$S_1 = 136\text{m}$	$\sigma = 1,5\text{cm}$
$S_2 = 115\text{m}$	$\sigma = 1,5\text{cm}$
$\alpha = 50^\circ$	$\sigma = 10''$

a) Modelo matemático

$$d = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 - 2s_1s_2 \cos \alpha}$$

34

Exercícios

b) Cálculo da matriz D

$$\frac{\partial d}{\partial s_1} =$$

$$\frac{\partial d}{\partial s_2} =$$

$$\frac{\partial d}{\partial \alpha} =$$

35

Exercícios

c) Montagem da matriz MVC de s_1 , s_2 e α

d) Cálculo da MVC de d

36

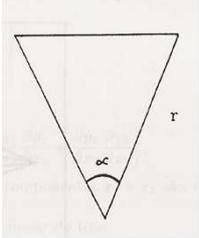
Exercícios: Solução com FreeMat

37

Exercícios

Na figura ao lado foram medidos o ângulo (α) e o raio (r) com o seguinte resultado:

Ângulo (α)	Raio (r)
60° 31,7'	120,01m
60° 33,8'	119,99m
60° 27,6'	120,07m
60° 30,7'	119,93m
60° 28,2'	120,13m



Estimar a variância da área do triângulo.

38

Exercícios

Resposta:

a) Estimativa do ângulo α →

b) Estimativa do raio →

c) Estimativa da variância da média

d) Área do triângulo

$$Area = \frac{B * h}{2} = \frac{(2 * r * \text{sen}(\alpha / 2)) * (r * \text{cos}(\alpha / 2))}{2} = \frac{r^2 * \text{sen}(\alpha)}{2}$$

39

Exercícios

e) Propagação → $\Sigma_{arcs} = D \Sigma_{\alpha, r} D^T$

40

Exercícios: Solução com FreeMat

41

Exercícios

Na poligonal O-B-C-D da figura a seguir, o ponto inicial é considerado a origem do sistema de coordenadas e o azimute α é conhecido: $\alpha=15^\circ 0' 0''$

ÂNGULOS			LADOS		
nome	média	σ	nome	média	σ
A1	40° 20' 10"	2"	L1	6000m	3mm ± 10ppm
A2	209° 47' 59"	2"	L2	3000m	3mm ± 10ppm
A3	202° 00' 17"	2"	L3	1500m	3mm ± 10ppm

Calcular a MVC das coordenadas do vértice D.

42

Exercícios

Resposta:

a) Azimute dos segmentos da poligonal

b) MVC dos azimutes

43

Exercícios

Resposta:

c) Coordenadas do vértice A3

d) MVC das distâncias observadas

e) MVC das distâncias e azimutes

$$\Sigma_{L,\alpha} = \begin{bmatrix} \Sigma_L & 0 \\ 0 & \Sigma_\alpha \end{bmatrix}$$

44

Exercícios

Montagem da MVC das distâncias e azimutes, no FreeMat ...

45

 Exercícios

Resposta:
f) MVC das coordenadas do vértice D

46

 Exercícios

 Exercícios: Solução com FreeMat

Exercícios: Solução com FreeMat

49

Exercícios

- 1) Uma distância inclinada é observada com $(2508,983 \pm 0,008)\text{m}$. O ângulo zenital é observado com $88^\circ 45' 13'' \pm 8,8''$. Calcule a distância horizontal e o erro estimado.
- 2) Com os dados do exercício anterior, plote ângulos zenitais de 30° a 90° versus erros estimados.
- 3) Conforme mostrado na figura seguinte, uma pista de corrida é medida segundo três componentes: um retângulo e dois semicírculos. Usando um MED com precisão nominal especificada $\pm(3\text{mm}+5\text{ppm})$, as dimensões do retângulo interno à pista foram observadas 5280,05m por 840,20m. Assumindo erros somente nas distâncias observadas, calcule:
 - a) o desvio padrão de cada observação;
 - b) o comprimento do perímetro da pista e o respectivo desvio padrão;
 - c) a área envolvida pela pista com o respectivo desvio padrão.



50

Exercícios

- 4) Dado um azimute de $105^\circ 27' 44'' \pm 3''$ e uma distância de 638,37m com erro estimado de $\pm 0,02$, calcule as projeções sobre os eixos X e Y com seus respectivos erros estimados.
- 5) Determine a incerteza na área de um terreno que mede $(25,50 \pm 0,15)\text{m}$ de frente e $(32,10 \pm 0,30)\text{m}$ de profundidade. Se o metro quadrado de terreno, nesta região, custa R\$200,00, qual a incerteza associada ao pagamento deste terreno?
- 6) Calcule $(12,3 \pm 0,2) + (10,01 \pm 0,03) + (8,001 \pm 0,005)$.
- 7) Calcule $y = \frac{(24,95 \pm 0,02) \cdot (0,1000 \pm 0,0002)}{(25,6 \pm 0,1)}$
- 8) Qual a área e precisão de uma peça em formato de paralelepípedo com as seguintes medidas: L1 = $(5,00 \pm 0,05)\text{cm}$; L2 = $(20,00 \pm 0,05)\text{mm}$; L3 = $(15,00 \pm 0,01)\text{mm}$.
- 9) A medida do ângulo de refração de um raio luminoso ao penetrar em um meio transparente é de $\theta = (22,3 \pm 0,3)^\circ$. Qual é o erro na determinação de $y = \text{seno}(\theta)$?

51

Resolução dos exercícios propostos

No FreeMat...

55

Resolução dos exercícios propostos

3) Conforme mostrado na figura seguinte, uma pista de corrida é medida segundo três componentes: um retângulo e dois semicírculos. Usando um MED com precisão nominal especificada $\pm(3\text{mm}+5\text{ppm})$, as dimensões do retângulo interno à pista foram observadas 5280,05m por 840,20m. Assumindo erros somente nas distâncias observadas, calcule:

- a) o desvio padrão de cada observação;
- b) o comprimento do perímetro da pista e o respectivo desvio padrão;
- c) a área envolvida pela pista com o respectivo desvio padrão.



56

Resolução dos exercícios propostos

57

Resolução dos exercícios propostos

58

Resolução dos exercícios propostos

4) Dado um azimute de $105^{\circ}27'44'' \pm 3''$ e uma distância de 638,37m com erro estimado de $\pm 0,02$, calcule as projeções sobre os eixos X e Y com seus respectivos erros estimados.

59

Resolução dos exercícios propostos

60

Resolução dos exercícios propostos

- 5) Determine a incerteza na área de um terreno que mede $(25,50 \pm 0,15)$ m de frente e $(32,10 \pm 0,30)$ m de profundidade. Se o metro quadrado de terreno, nesta região, custa R\$200,00, qual a incerteza associada ao pagamento deste terreno?

61

Resolução dos exercícios propostos

62

Resolução dos exercícios propostos

- 6) Calcule $(12,3 \pm 0,2) + (10,01 \pm 0,03) + (8,001 \pm 0,005)$.

63

Resolução dos exercícios propostos

- 7) Calcule $y = \frac{(24,95 \pm 0,02)(0,1000 \pm 0,0002)}{(25,6 \pm 0,1)}$ Como que se sabe que não tem constante na fórmula?

64

Resolução dos exercícios propostos

65

Resolução dos exercícios propostos

- 8) Qual a área e precisão de uma peça em formato de paralelepípedo com as seguintes medidas: $L1 = (5,00 \pm 0,05)\text{cm}$; $L2 = (20,00 \pm 0,05)\text{mm}$; $L3 = (15,00 \pm 0,01)\text{mm}$.

66

Resolução dos exercícios propostos

9) A medida do ângulo de refração de um raio luminoso ao penetrar em um meio transparente é de $\theta = (22,3 \pm 0,3)^\circ$. Qual é o erro na determinação de $y = \text{seno}(\theta)$?

67

Resolução dos exercícios propostos

10) Considere a tabela abaixo obtida para o período de um pêndulo para diferentes comprimentos de um fio. Os dados para o período foram coletados para 10 medidas distintas e representase na tabela o valor médio com o correspondente desvio padrão da média. Os valores de comprimento foram obtidos a partir de uma régua graduada em mm (precisão = metade da menor divisão). Sabe-se que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\rightarrow g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Período (s)	Desvio padrão da média (s)	Comprimento do fio (cm)	Aceleração da gravidade (cm/s ²)
1,85662	0,0063	85,0	973,49
1,75879	0,0002	77,0	982,70
1,30074	0,0001	43,0	1003,34
1,85101	0,0001	85,0	979,40
1,77009	0,0007	80,0	1008,00
1,55591	0,0004	60,0	978,46
1,8415	0,0004	85,0	989,54
1,79529	0,0003	80,0	982,08
1,73796	0,0006	75,0	980,26
1,87082	0,0006	85,0	958,77
1,38117	0,0030	45,0	931,28
1,12378	0,0009	30,0	937,82
		Valor médio	975
		Desvio padrão da média	7

68

Resolução dos exercícios propostos

69

Resolução dos exercícios propostos

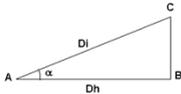
70

Exercícios

11) Uma distância de aproximadamente 490 metros deve ser medida com uma trena de 50m de comprimento. Sabendo-se que o desvio padrão de cada "trenada" é conhecido e igual a 5mm, qual seria o desvio padrão da distância total D?

12) Qual o desvio padrão da área de um lote retangular que tem as seguintes dimensões: $L = (10,00 \pm 0,03)m$ e $C = (30,00 \pm 0,05)m$.

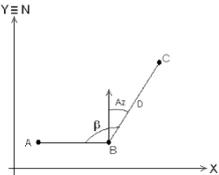
13) Suponha um ângulo vertical α medido do ponto A para o ponto C. O valor $\alpha = 30^\circ$ possui um desvio padrão $\sigma_\alpha = 1''$. A distância inclinada Di foi medida e acusou valor igual a 330m com desvio padrão $\sigma_D = 0,5m$. Para estas condições, encontrar o desvio padrão da distância horizontal Dh correspondente.



71

Exercícios

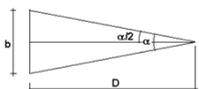
14) O ângulo β e a distância D foram medidos para se calcular as coordenadas do ponto C. As coordenadas de A e B são conhecidas e consideradas livres de erros. Qual será o desvio padrão das novas coordenadas X_c e Y_c se os desvios padrões da distância e do ângulo são $\sigma_D = 2cm$ e $\sigma_\beta = 10''$



72

Exercícios

15) Dê a expressão do erro da distância para a medição com mira horizontal. Considere inicialmente que o fabricante da mira forneceu o comprimento da mira como sendo de 2m e desvio padrão $\sigma_b = b \cdot 10^{-3}$. O que influencia mais na medição da distância, o comprimento da mira ou o ângulo medido? Faça um estudo analisando o comportamento do erro na distância considerando distâncias entre 10 e 200m.



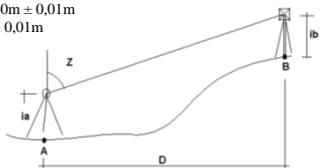
16) Mediu-se uma base em duas partes. Uma das partes foi medida com uma fita que possibilita medir a distância com erro médio quadrático $\sigma_1 = 0,00004m$; a segunda parte o erro médio quadrático é de $\sigma_2 = 0,00002m$ para cada medida. Foi necessário utilizar cada uma das fitas 250 vezes. Qual o erro médio quadrático da base?

73

Exercícios

17) Para a obtenção da altitude do ponto B foi realizado um nivelamento trigonométrico a partir do ponto A, cuja altitude é $H_A = 148,32m$ com desvio padrão $\sigma = 0,15m$. Qual o desvio padrão da altitude de B, não considerando o efeito da refração, sabendo-se que em campo foram obtidos os seguintes dados:

$D = 1000,00m \pm 0,10m$
 $Z = 87^\circ 42' 13'' \pm 20''$
 Altura do instrumento = $1,40m \pm 0,01m$
 Altura do prisma = $1,80m \pm 0,01m$



74

Resolução dos exercícios propostos

18) Com o objetivo de determinar a diferença de nível entre dois pontos distantes 2250m será realizado um nivelamento geométrico, tomando-se o cuidado de colocar o nível a iguais distâncias da mira. Assumindo que as visadas de ré e vante serão de 25m, pede-se o erro cometido na determinação da diferença de nível desejada. Estabeleça uma fórmula geral que permita estimar este erro. Supor o erro de cada leitura sobre a mira igual a 0,1mm.

19) Para uma grandeza medida n vezes pede-se estabelecer uma fórmula geral que permita obter o desvio padrão da média das referidas medidas. Utilize σ_o = desvio padrão de uma observação isolada e σ_m = desvio padrão da média das observações.

20) Conhecida a precisão de uma medida pelo desvio padrão σ_o , quantas vezes tem-se que repetir a mesma medida para dobrar a precisão da média? Procedimento: fazendo n_1 observações tem-se uma média m_1 e uma precisão da média igual a σ_1 ; fazendo n_2 observações tem-se uma média m_2 e uma precisão da média igual a σ_2 . Sendo o requisito $\sigma_2 = \sigma_1/2$, qual o valor de n_2 ? Manter σ_o = desvio padrão de uma observação isolada.

75

Resolução dos exercícios propostos

11) Uma distância de aproximadamente 490 metros deve ser medida com uma trena de 50m de comprimento. Sabendo-se que o desvio padrão de cada "trenada" é conhecido e igual a 5mm, qual seria o desvio padrão da distância total D?

76

Resolução dos exercícios propostos

77

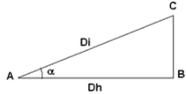
Resolução dos exercícios propostos

12) Qual o desvio padrão da área de um lote retangular que tem as seguintes dimensões: $L = (10,00 \pm 0,03)m$ e $C = (30,00 \pm 0,05)m$.

78

Resolução dos exercícios propostos

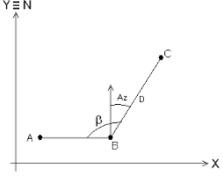
13) Suponha um ângulo vertical α medido do ponto A para o ponto C. O valor $\alpha = 30^\circ$ possui um desvio padrão $\sigma_\alpha = 1'$. A distância inclinada D_i foi medida e acusou valor igual a 330m com desvio padrão $\sigma_{D_i} = 0,5m$. Para estas condições, encontrar o desvio padrão da distância horizontal D_h correspondente.



79

Resolução dos exercícios propostos

14) O ângulo β e a distância D foram medidos para se calcular as coordenadas do ponto C. As coordenadas de A e B são conhecidas e consideradas livres de erros. Qual será o desvio padrão das novas coordenadas X_c e Y_c se os desvios padrões da distância e do ângulo são $\sigma_D = 2cm$ e $\sigma_\beta = 10''$



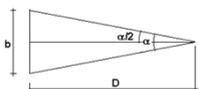
80

Resolução dos exercícios propostos

81

Resolução dos exercícios propostos

15) Dê a expressão do erro da distância para a medição com mira horizontal. Considere inicialmente que o fabricante da mira forneceu o comprimento da mira como sendo de 2m e desvio padrão $\sigma_b = b \cdot 10^{-3}$. O que influencia mais na medição da distância, o comprimento da mira ou o ângulo medido? Faça um estudo analisando o comportamento do erro na distância considerando distâncias entre 10 e 200m.



$D = 100b$

$\sigma_D = 100\sigma_b = b \cdot 10^{-3}$

$\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b/2}{D} = \frac{b}{2D} = \frac{b}{2 \cdot 100b} = \frac{1}{200}$

82

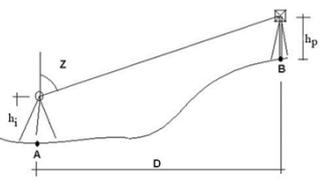
Resolução dos exercícios propostos

16) Mediu-se uma base em duas partes. Uma das partes foi medida com uma fita que possibilita medir a distância com erro médio quadrático $\sigma_1 = 0,00004\text{m}$; a segunda parte o erro médio quadrático é de $\sigma_2 = 0,00002\text{m}$ para cada medida. Foi necessário utilizar cada uma das fitas 250 vezes. Qual o erro médio quadrático da base?

83

Resolução dos exercícios propostos

17) Para a obtenção da altitude do ponto B foi realizado um nivelamento trigonométrico a partir do ponto A, cuja altitude é $H_A = 148,32\text{m}$ com desvio padrão $\sigma = 0,15\text{m}$. Qual o desvio padrão da altitude de B, não considerando o efeito da refração, sabendo-se que em campo foram obtidos os seguintes dados:



84

 Resolução dos exercícios propostos

85

 Resolução dos exercícios propostos

86

 Resolução dos exercícios propostos

18) Com o objetivo de determinar a diferença de nível entre dois pontos distantes 2250m será realizado um nivelamento geométrico, tomando-se o cuidado de colocar o nível a iguais distâncias da mira. Assumindo que as visadas de ré e vante serão de 25m, pede-se o erro cometido na determinação da diferença de nível desejada. Estabeleça uma fórmula geral que permita estimar este erro. Supor o erro de cada leitura sobre a mira igual a 0,1mm.

87

Resolução dos exercícios propostos

19) Para uma grandeza medida n vezes pede-se estabelecer uma fórmula geral que permita obter o desvio padrão da média das referidas medidas. Utilize σ_o = desvio padrão de uma observação isolada e σ_m = desvio padrão da média das observações.

88

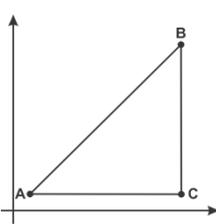
Resolução dos exercícios propostos

20) Conhecida a precisão de uma medida pelo desvio padrão σ_o , quantas vezes tem-se que repetir a mesma medida para dobrar a precisão da média? Procedimento: fazendo n_1 observações tem-se uma média m_1 e uma precisão da média igual a σ_1 ; fazendo n_2 observações tem-se uma média m_2 e uma precisão da média igual a σ_2 . Sendo o requisito $\sigma_2 = \sigma_1/2$, qual o valor de n_2 ? Manter σ_o = desvio padrão de uma observação isolada.

89

Exercícios

21) Um triângulo tem suas coordenadas determinadas em campo: A(10,10)m, B(100,100)m e C(100,10)m, sempre com desvio padrão $\sigma_x = \sigma_y = 5\text{mm}$; $\sigma_{xy} = 0$. Determinar a área (Base*Altura/2) com a correspondente precisão.



90

 Exercícios

Resolução por etapas

91

 Exercícios

Resolução por etapas

92

 Exercícios

Resolução por etapas

93

 Exercícios

Resolução algébrica

94

 Exercícios

Resolução algébrica

95

 Exercícios

No FreeMat...

96

Exercícios

No FreeMat...

97

Exercícios

22) O triângulo apresentado ao lado tem o lado a e os ângulos α e β medidos. O desvio padrão da medida angular é igual a $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 20''$ e o desvio padrão da distância $\sigma_s = 0,19\text{m}$. Determinar o lado b e o seu desvio padrão.



$a = 400,20\text{m}$
 $\alpha = 45^\circ 20' 14''$
 $\beta = 52^\circ 03' 43''$

98

Exercícios

Resolução por etapas

99

 Exercícios

Resolução por etapas

100

 Exercícios

Resolução algébrica

101

 Exercícios

Resolução algébrica

102

 Exercícios

No FreeMat...

103

 Exercícios

No FreeMat...

104
