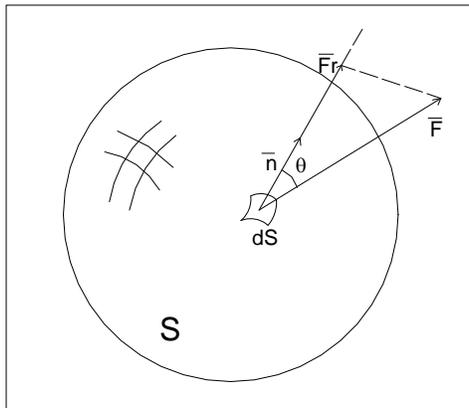


5.2.4 – Equações de Green e Chasles

a) Fórmula de Gauss-Ostrogradsky



S - superfície fechada

\vec{n} - versor normal à superfície em dS

\vec{F} - vetor de campo qualquer tal que $F_n = \vec{F} \cdot \vec{n} = \vec{F} \cos \theta$

S envolve um volume σ

Define-se como fluxo \vec{F} através de dS à grandeza:

$$\Phi = \int_S \vec{F}_n \cdot d\vec{S}$$

A fórmula de Gauss-Ostrogradsky estabelece que:

$$\oint_S \vec{F}_n \cdot d\vec{S} = \int_{\sigma} \text{div} \vec{F} \cdot d\vec{v} \quad (1)$$

onde $d\vec{v}$ é um elemento de volume

b) Identidades de Green

Sejam duas funções escalares $V(x,y,z)$ e $U(x,y,z)$ e um vetor arbitrário $\vec{F}(x,y,z)$ tal que :

$$\vec{F}_x = U \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \vec{F}_y = U \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \vec{F}_z = U \frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{e} \quad \vec{F}_n = U \frac{\partial V}{\partial n} \quad (2)$$

Sendo $\text{div} \vec{F} = \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z}$

Logo $\frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \dots$

$$\text{Então } \boxed{\text{div} \vec{F} = U \left\{ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \right\} + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z}} \quad (3)$$

Aplicando-se (3) e (2) na (1) obtém-se a 1ª identidade de Green

$$\boxed{\oint_S U \frac{\partial V}{\partial n} dS = \int_{\sigma} [U \Delta V + A] dv} \quad (4)$$

Permutando-se U por V na (4) obtém-se

$$\boxed{\oint_S V \frac{\partial U}{\partial n} dS = \int_{\sigma} [V \Delta U + A] dv} \quad (5)$$

Fazendo (4) menos (5) obtém-se a 2ª identidade de Green

$$\boxed{\oint_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = \int_{\sigma} [U \Delta V - V \Delta U] dv} \quad (6)$$

Considerando $U = 1/l$ com $l = l(x,y,z)$, sendo l a distância a um ponto P que pode ser interior, sobre S ou exterior a esta. Então

$$\boxed{\int_V \frac{1}{l} \Delta V dv = -p V_p + \int_S \left[\frac{1}{l} \cdot \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) \right] dS} \quad (7)$$

que é a 3ª identidade de Green.

Com $p =$ 4π para P interior a S
 2π para P sobre a S
 0 para P exterior a S

Orientando-se a normal para o interior de S obtém-se:

$$\boxed{\int_V \frac{1}{l} \Delta V dv = -p V_p - \int_S \left[\frac{1}{l} \cdot \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) \right] dS} \quad (8)$$

Com $p =$ 0 para P interior a S
 2π para P sobre a S
 4π para P exterior a S

a) Fórmula de Chasles

Considerando V harmônica no exterior de S , resulta da (8) ($\Delta V=0$). Considerando S equipotencial $V_s=V_0=\text{constante}$.

$$\boxed{V_p = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{l} \cdot \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) \right] dS}$$

onde $V \frac{\partial}{\partial n} \cdot \frac{1}{l} = 0$ pois, sendo a integral sobre S de $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right)$ nula para pontos exteriores a

S. Logo:

$$\boxed{V_p = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial V}{\partial n} dS} \quad (9)$$

que é a Fórmula de Chasles.

5.2.5 Interpretação

Admita-se que S é equipotencial e envolva um corpo de massa M com potencial em P dado por:

$$\boxed{V_p = G \int_{\sigma} \frac{dM}{l}}$$

Pode-se escrever a (9) como:

$$\boxed{V_p = G \int_S \frac{\bar{\rho} dS}{l}}$$

sendo $\boxed{\bar{\rho} = -\frac{1}{4\pi G} \cdot \frac{\partial V}{\partial n}}$

que é uma grandeza que tem a dimensão física $[ML^{-2}]$ ou de densidade superficial. Desta forma, a fórmula de Chasles pode ser interpretada como: O potencial produzido por uma massa M em um ponto P é equivalente ao produzido por qualquer superfície equipotencial do campo na qual se considere a massa M distribuída com densidade superficial dada por $\bar{\rho} = -\frac{1}{4\pi G} \cdot \frac{\partial V}{\partial n}$.

