UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA
DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

# AJUSTAMENTO I – GA106

Prof. Alvaro Muriel Lima Machado

1

## Introdução

**Medidas e Observações**

(processo ou operação X resultado da operação)

2

## Introdução

**Propriedades fundamentais da medida:**

- Medir significa realizar uma operação física, consistindo de várias operações elementares tais como preparação, calibração, pontaria, leitura, etc.;
- O resultado do processo é a observação, e representa a medida;
- A não ser na contagem de certos eventos, a medida é sempre realizada com o auxílio de instrumentos;
- As medidas estão referenciadas a um padrão, os quais são estabelecidos por convenção. Medir é então comparar uma grandeza a um padrão, tendo então unidade e dimensão;

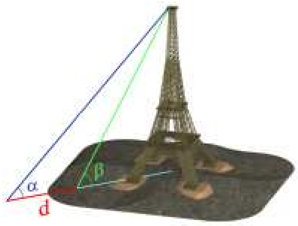
3

## Introdução

As medições podem ser feitas:

- Diretamente
- Indiretamente

$$h = \frac{d.tg\alpha}{tg\beta - tg\alpha}.tg\beta$$




4

## Introdução

No processo de medição, o operador deve ter consciência que *não existe observação exata e todas as medidas estão afetadas por erros.*

5

## Introdução

**Erros de Observação**

- Não existe observação exata;
- Toda e qualquer observação contém erros;
- O valor verdadeiro da observação nunca é conhecido;
- A magnitude exata dos erros presentes no processo é sempre desconhecida.

**Erro = Valor Medido – Valor Verdadeiro**

**Desvio = Valor Medido – Valor Mais Provável**

**Qual a unidade de erro / desvio?**

6

## Introdução

A Teoria dos Erros cuida da análise dos erros cometidos durante as medições para saber se eles são estatisticamente confiáveis e se suas magnitudes são aceitáveis (dentro de determinados limites).

Em seguida as medidas devem ser ajustadas de acordo com as especificações geométricas ou outras particularidades (condições ou restrições) que possam interferir no processo de medição.

Finalmente obtém-se a melhor determinação do ponto medido.

7

## Introdução

**Fontes de Erros**

- Erros Instrumentais
- Erros Naturais
- Erros Pessoais

**Classificação dos Erros de Observação**

- Erros Grosseiros
- Erros Sistemáticos
- Erros Acidentais ou Aleatórios

8

## Erros Grosseiros

São oriundos de uma falsa determinação do valor de uma grandeza. Pode ser provocado pela falta de atenção do operador (equívoco), ou pelo uso de equipamento inadequado.

Exemplo: Troca de dígitos em anotações de medidas

Podem ser detectados através de procedimentos de verificação. Geralmente, os valores errados são facilmente detectáveis devido à sua grandeza, sem relação alguma com outras observações efetuadas. Quando isto não acontece são muito difíceis de serem identificados.

**ATENÇÃO**

9

## Erros Sistemáticos

São oriundos de influências externas às medições, sem serem considerados no processo. Podem ser de origem instrumental, ou de origem física (condições ambientais).

Exemplos: Medida eletrônica de longa distância sem a consideração do efeito da refração. Operador de nível que realiza a leitura sempre um pouco abaixo do traço da mira. Equipamento de medição não calibrado.

Este tipo de erro possui a particularidade de se repetir da mesma forma sempre que a medição for repetida em condições idênticas. Pode ser eliminado através de técnicas especiais de observação ou de modelo físico adequado para o cálculo da grandeza medida.

10

## Erros Acidentais ou Aleatórios

Depois da eliminação dos erros grosseiros (adoção de procedimentos de verificação) e dos erros sistemáticos (adoção de modelos físicos apropriados), as observações repetidas sobre uma mesma grandeza ainda se revelam com discrepâncias entre si. Tais erros não são vinculados a nenhuma causa conhecida.

**O erro acidental é o erro estudado na Teoria dos Erros!**

11

## Erros Acidentais ou Aleatórios

Quando a quantidade de observações cresce:

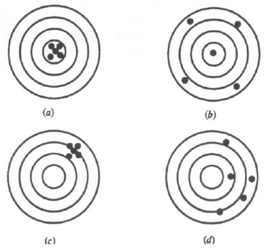
- Os resíduos de mesmo módulo e sinais opostos são igualmente prováveis;
- Os resíduos menores ocorrem com maior frequência;
- A média dos resíduos é aproximadamente nula.


**Média de resíduos diferente de zero deve servir de alerta para a presença de erros sistemáticos!**

12

## Indicadores de Precisão

**Precisão X Acurácia (Exatidão)**




**Precisão**: Grau de afastamento dos valores medidos em relação a sua **média**.

**Acurácia**: Grau de afastamento dos valores medidos em relação ao seu **valor verdadeiro**.

Precisão está vinculado apenas a efeitos aleatórios
Acurácia vincula-se a efeitos aleatórios e sistemáticos.

13

## Introdução

**Importância da redundância nas observações**

- Permite a detecção de erros grosseiros através da confirmação dos valores medidos;
- Permite uma avaliação mais precisa das propriedades desejadas, através da execução de um ajustamento;
- Permite estimar a ordem de grandeza da precisão obtida para os valores ajustados.
  - ➔ Graus de liberdade
  - ➔ Exemplos com verificação de erros de fechamento
    - Nivelamento em poligonal fechada
    - Somatória de ângulos internos de polígonos

**Modelo Matemático:** funcional e estocástico
**Ajustamentos**
**Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)**

14

## Estatística

L = [ 22,7 22,3 21,9 22,6 23,1 22,9 22,8 23,5 21,7 23,2]

**Dado um conjunto de elementos, quais as ferramentas estatísticas que podem ser usadas para representar e analisar o mesmo?**

15

Estatística

**População X Amostra**

- A população consiste de todas as possíveis medidas que podem ser feitas de uma quantidade particular. As vezes a população tem um número infinito de elementos (dados);

- Amostra é um subconjunto de dados selecionado a partir da população. Deve apresentar as mesmas características (objeto de estudo) da população, de forma que possa representá-la adequadamente.

16

Estatística

População → Amostra

Distribuição de Probabilidade (ou FDP) — Distribuição Amostral

Parâmetros (valor fixo) ← estimar — Estatísticas (variável aleatória)

- Por pontos
- Por intervalos

17

Estatística

Espaço Amostral
= Conjunto de todos os resultados possíveis.

Variável Aleatória (v.a.) ou estocástica é uma função que associa a cada elemento de um espaço amostral um número real.
É uma função que assume um valor real em cada ponto de seu espaço amostral.

A v.a. é definida pela sua distribuição amostral, modelo matemático que associa uma probabilidade a cada valor que a v.a. pode assumir.

18

## Estatística

**Intervalo /Dispersão / Amplitude**: diferença entre o maior e o menor valor da leitura.

**Frequência**: quantidade de vezes que um evento acontece.

**Frequência Acumulada**: somatório das frequências.

**Porcentagem**: calcula-se da seguinte maneira

$$\frac{frequência}{total} x100\%$$

**Porcentagem Acumulada**: somatório das porcentagens.

19

## Estatística

• Quando uma grande quantidade de dados brutos está envolvida nos estudos, é possível distribuí-los em classes ou categorias e determinar o número de indivíduos pertencentes a cada uma das classes, denominado freqüência da classe.

• Um arranjo tabular dos dados por classes, juntamente com as freqüências correspondentes, é denominado distribuição de freqüência ou tabela de freqüência.

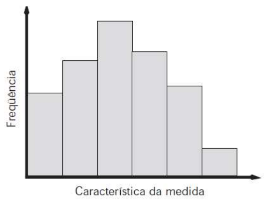
20

## Estatística

**Histograma**: gráfico de barras que mostra a variação de uma medida em um grupo de dados através da distribuição de frequência.

Seu principal uso é estimar a distribuição de uma característica na população através de amostras.

O histograma demonstra visualmente a variabilidade das medidas de uma característica do processo em torno da média.




**Vantagem:**
Visualização/entendimento rápido do comportamento da população.

21

## Exercício Resolvido

| Alturas de 100 estudantes do sexo masculino da Universidade XYZ | |
|---|---|
| Altura (cm) | Número de estudantes |
| 151 – 158 | 5 |
| 159 – 166 | 18 |
| 167 - 174 | 42 |
| 175 – 182 | 27 |
| 183 – 190 | 8 |
| TOTAL → | 100 |

- Amplitude
- Classes
- Limites de classe
- Comprimento de classe
- Frequência

22

## Histograma

**Como construir um histograma?**

1) Conte a quantidade de valores coletados na tabulação.
2) Determine a amplitude R de toda a tabulação, subtraindo o menor valor do maior.
3) Determine a quantidade de classes K desejada.
4) Determine o intervalo de classe H = R/K.
5) Determine o limite das classes ou os pontos limites. Simplificando, tome a menor medida individual da tabulação para ser o valor inferior do primeiro intervalo. A este número acrescente o valor H e obterá o valor superior. Proceda da mesma forma com todos os outros valores até chegar à maior medida.
6) Construa uma tabela de frequência baseada nos valores definidos no passo 5 para os dados trabalhados no passo 1.
7) Construa o histograma baseado na tabela de frequências.

23

## Exercício

A tabela abaixo mostra a distribuição de frequência dos salários, em reais, de 65 empregados da Companhia X & Y.
Com referência a esta tabela, determinar:

| Salários (Reais) | Número de empregados |
|---|---|
| 500,00 – 599,00 | 8 |
| 600,00 – 699,00 | 10 |
| 700,00 – 799,00 | 16 |
| 800,00 – 899,00 | 14 |
| 900,00 – 999,00 | 10 |
| 1000,00 – 1099,00 | 5 |
| 1100,00 – 1199,00 | 2 |
| TOTAL → | 65 |

a) O limite inferior da sexta classe;
b) O limite superior da quarta classe;
c) O ponto médio da terceira classe;
d) Os limites reais da quinta classe;
e) Amplitude do quinto intervalo de classe;
f) A frequência da terceira classe;
g) A frequência relativa da terceira classe;
h) O intervalo de classe que tem a maior frequência (classe modal);
i) A porcentagem de empregados que ganham menos de R$800,00;
j) A porcentagem de empregados que ganham acima de R$599,00 e abaixo de R$1000,00;
k) Construir a distribuição de frequência acumulada.

24

## Exercício Resolvido



## Exercício Resolvido

k) Construir a distribuição de frequência acumulada.



## Exercício

Na tabela seguinte estão relacionados os pesos de quarenta estudantes do sexo masculino da Universidade Estadual, arredondados para meio quilo. Construir o histograma e histograma de frequência relativa, considerando 6 classes.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 69 | 82 | 75 | 66 | 72 | 62,5 | 74,5 | 78,5 |
| 73 | 79 | 70 | 73,5 | 68 | 74 | 76 | 72 |
| 84 | 63 | 69 | 88 | 81,5 | 59,5 | 77 | 82,5 |
| 73 | 86,5 | 71 | 73,5 | 67,5 | 76,5 | 70 | 67,5 |
| 80,5 | 72,5 | 67,5 | 71 | 75 | 78 | 72,5 | 64 |

## Exercício Resolvido



## Exercício Resolvido



## Estatística

**Medidas de tendência central**

- Média aritmética $M = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

- Mediana: é o valor que ocupa o ponto intermediário.
  (separatrizes: quartis, decis, percentis)

- Moda: o valor que mais frequentemente se repete.

## Estatística

**Exemplo:**
Seja uma amostra de tamanho *n*. A sua média aritmética é

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Se cada um dos *r* valores distintos de $x_i$ ocorrer na amostra com uma frequência $n_j$, a fórmula anterior assumirá a forma

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{r} \frac{n_j x_j}{n}$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{r} x_j \cdot f_j$$ sendo $f_j = \frac{n_j}{n}$ a frequência relativa.

31

## Exercício

| x | p(x) |
|---|---|
| 0 | 0,020 |
| 1 | 0,001 |
| 2 | 0,002 |
| 3 | 0,005 |
| 4 | 0,002 |
| 5 | 0,040 |
| 6 | 0,180 |
| 7 | 0,370 |
| 8 | 0,250 |
| 9 | 0,120 |
| 10 | 0,010 |

32

## Estatística

**Medidas de dispersão**

Variância da população $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n}$

Variância da amostra $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}$

Variância envolve soma de quadrados
➔
unidade diferente dos dados

33

## Estatística

**Medidas de dispersão**

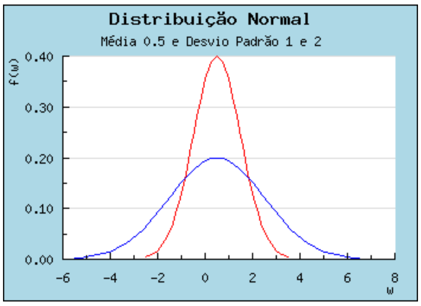
Erro padrão $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n}}$

Desvio padrão $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$

Desvio padrão da média $s_{\bar{\mu}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n(n-1)}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$

34

## Medidas de dispersão




**Curva normal reduzida**

- μ = 0
- σ = 1

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

35

## Exercício

O conjunto de dados, mostrado abaixo, representa a porção em segundos de arco de 50 medidas de uma direção. Calcular a média, a mediana, desvio padrão da amostra e construir um histograma de classes.

L(01:10) = [34.2 33.6 35.2 30.1 38.4 34.0 30.2 34.1 37.7 36.4];

L(11:20) = [37.9 33.0 33.5 35.9 35.9 32.4 39.3 32.2 32.8 36.3];

L(21:30) = [35.3 32.6 34.1 35.6 33.7 39.2 35.1 33.4 34.9 32.6];

L(31:40) = [36.7 34.8 36.4 33.7 36.1 34.8 36.7 30.0 35.3 34.4];

L(41:50) = [33.7 34.1 37.8 38.7 33.6 32.6 34.7 34.7 36.8 31.8];

36

## Exercício Resolvido

```
function [classe, frequencia] = histo(observacoes, numeroClasses)
amplitude = max(observacoes) - min(observacoes);
TamanhoClasse = amplitude / numeroClasses;
MetadeTamanhoClasse = TamanhoClasse/2;
for K = 1 : numeroClasses
 LimiteInferiorClasse(K) = min(observacoes) +(K-1)*TamanhoClasse;
 LimiteSuperiorClasse(K) = LimiteInferiorClasse(K) + TamanhoClasse;
 frequencia(K) = length(observacoes((LimiteInferiorClasse(K)<=observacoes) &
(observacoes<LimiteSuperiorClasse(K))));
 classe(K) = LimiteInferiorClasse(K) + MetadeTamanhoClasse;
end;
plot(classe, frequencia)
```

37

## Exercício Resolvido

```
function [saida] = mediana(dados)
% Função que calcula a mediana
% Tamanho do conjunto de dados
m  = length(dados);
% Classificação ascendente dos dados
dados_em_ordem = sort(dados);
% Qtde de elementos do conjunto é par ou impar?
if  (mod(m,2) == 0)
  saida = (dados_em_ordem(m/2)+dados_em_ordem(m/2+1))/2;
else
  saida = dados_em_ordem(ceil(m/2));
end
```

38

## Exercício Resolvido

39

## Exercício

Duas variáveis, X e Y, assumem os valores $X_1 = 2$, $X_2 = -5$, $X_3 = 4$, $X_4 = -8$, e $Y_1 = -3$, $Y_2 = -8$, $Y_3 = 10$, $Y_4 = 6$, respectivamente. Calcular:

a) $\Sigma X = \sigma_X^2$ ;
b) ΣY;
c) ΣXY
d) $\Sigma X^2$;
e) $\Sigma Y^2$;
f) (ΣX)(ΣY);
g) $\Sigma XY^2$;
h) Σ((X+Y)(X-Y)).

40

## Exercício Resolvido

**a) ΣX;**

| X | X - μ | (X - μ)² |
|---|---|---|
| 2 | 3,75 | 14,0625 |
| -5 | -3,25 | 10,5625 |
| 4 | 5,75 | 33,0625 |
| -8 | -6,25 | 39,0625 |
| Σ = -7 | | Σ = 96,75 |

μ = -1,75

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2}{N-1} = \frac{96,75}{3} = 32,25$$

41

## Exercício Resolvido

42

## Exercício

Prove que a soma dos desvios de $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ em relação à sua média aritmética M, é igual a zero.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

$$N\mu = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i - N\mu = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i - \sum_{i=1}^{N} \mu = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu) = 0$$

43

## Exercício

Um distanciômetro eletrônico e um refletor foram instalados nos extremos de uma linha de base com 500m de extensão aproximadamente. Um operador repetiu 25 vezes a medida de seu comprimento e obteve os seguintes resultados:

L(01:05) = [500.806 500.824 500.814 500.793 500.804];
L(06:10) = [500.803 500.816 500.820 500.811 500.807];
L(11:15) = [500.825 500.820 500.809 500.800 500.813];
L(16:20) = [500.813 500.817 500.812 500.815 500.805];
L(21:25) = [500.807 500.810 500.828 500.808 500.799];

Pede-se:

a) A média, mediana e o desvio padrão dos dados;
b) Construir um histograma dos dados e descrever suas propriedades. No histograma delimite o desvio padrão a partir da média em ambos os lados;
c) Quantas observações estão entre a média e o desvio padrão? (M±s), e qual a percentagem que estas medidas representam?

44

## Exercício Resolvido

45

## Exercício Resolvido

1*σ → 68,26%
2*σ → 95,45%
3*σ → 99,73%

46

## Exercício

Uma distância foi medida em duas partes com uma fita de aço de 100m de comprimento, e depois, foi medida em sua totalidade com uma fita de aço de 200m. As medidas foram repetidas 10 vezes em cada método obtendo os seguintes conjuntos de dados:

Observações feitas com a fita de aço de 100m: (parte 1 e parte 2)
{100.001 100.018 99.974 99.992 99.972 99.990 99.950 99.984 99.979 99.988}
{49.329 49.365 49.346 49.300 49.327 49.324 49.349 49.357 49.341 49.333}

Observações feitas com a fita de 200m: (medidas do total)
{149.326 149.397 149.357 149.294 149.337 149.338 149.329 149.331 149.370 149.363}

Pede-se:

a) A média, a variância e o desvio padrão para cada um dos dois conjuntos das medidas parciais de distância, e também para os conjuntos das medidas considerando-se a distância total;
b) Crie uma tabela de classes de frequência e histograma para cada conjunto de dados usando a largura da classe 0,009 (9mm).

47

## Exercício Resolvido

48

## Exercícios

Um pesquisador realizou um levantamento obtendo 84 observações sobre uma grandeza com média 65,00. Após, verificou que duas destas observações, com medidas 95,52 e 105,82, estavam comprometidas. Deseja-se eliminar estas duas medidas e calcular o valor da média.
Sabendo-se que a variância de todas as observações é 41,590, qual vai ser o valor da nova variância (conjunto de observações sem as medidas comprometidas)?

49

## Exercícios

Um pesquisador realizou um levantamento obtendo 84 observações sobre uma grandeza com média 65,00. Após, verificou que duas destas observações, com medidas 95,52 e 105,82, estavam comprometidas. Deseja-se eliminar estas duas medidas e calcular o valor da média.
Sabendo-se que a variância de todas as observações é 41,590, qual vai ser o valor da nova variância (conjunto de observações sem as medidas comprometidas)?

50

## Exercícios

Em uma instituição bancária, o salário médio dos 100 empregados do sexo masculino é de R$ 1.500,00, com desvio padrão de R$100,00. O salário médio dos 150 empregados do sexo feminino é de R$ 1.000,00, com desvio padrão de R$200,00. A variância em $(R\$)^2$ dos dois grupos reunidos é de: (BACEN, 2005)

a) 25.600,00; b) 28.000,00; c) 50.000,00; d) 62.500,00; e) 88.000,00

51

## Exercícios

Em uma instituição bancária, o salário médio dos 100 empregados do sexo masculino é de R$ 1.500,00, com desvio padrão de R$100,00. O salário médio dos 150 empregados do sexo feminino é de R$ 1.000,00, com desvio padrão de R$200,00. A variância em $(R\$)^2$ dos dois grupos reunidos é de: (BACEN, 2005)

a) 25.600,00; b) 28.000,00; c) 50.000,00; d) 62.500,00; e) 88.000,00

52

## Exercícios

Em uma instituição bancária, o salário médio dos 100 empregados do sexo masculino é de R$ 1.500,00, com desvio padrão de R$100,00. O salário médio dos 150 empregados do sexo feminino é de R$ 1.000,00, com desvio padrão de R$200,00. A variância em $(R\$)^2$ dos dois grupos reunidos é de: (BACEN, 2005)

a) 25.600,00; b) 28.000,00; c) 50.000,00; d) 62.500,00; e) 88.000,00

53

## Estatística

**Distribuição de probabilidade de uma v.a. discreta**

Seja X uma v.a. discreta, isto é, que assume valores em associação com números inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Associemos a cada $x_i$ um número $p(x_i)$ representativo da sua probabilidade.

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

tal que

a) $0 \le p(xi) \le 1$

b) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

c) $P(a \le X \le b) = \sum_{i} p(x_i) \quad \forall$ i tal que $a \le X \le b$.

54

Estatística

**Distribuição de probabilidade de uma v.a. contínua**

Seja X uma v.a. contínua.
A probabilidade "pontual" associada à variável discreta é substituída pela densidade de probabilidade φ(x) relativa a um intervalo infinitésimo.

φ(x)dx = P(x ≤ X ≤ x+dx) ou $\varphi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$

tal que

a) φ(x) ≥ 0

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).dx = 1$

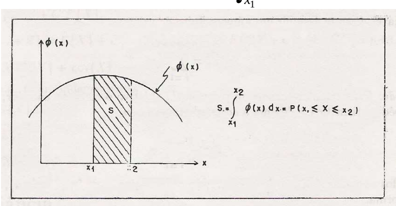
c) P(a ≤ X ≤ b) = $\int_{a}^{b} \varphi(x).dx$

55

Estatística

**A função φ que estabelece a correspondência entre um valor da v.a. contido no intervalo elementar e a densidade de probabilidade é denominada *função densidade de probabilidade* (fdp).**

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x).dx$$




56

Estatística

**Função de distribuição de probabilidade acumulada**

A função φ tal que

$$\varphi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u).du$$

chama-se ***função de distribuição (de probabilidade) acumulada*** (fda) de uma v.a. contínua X.

57

## Exercício

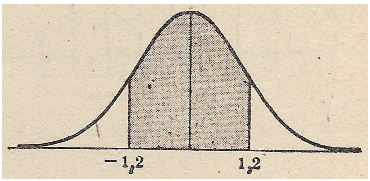
A média dos diâmetros internos de uma amostra de 200 arruelas produzidas por uma certa máquina é 0,502 cm e o desvio padrão é 0,005 cm. A finalidade para a qual essas arruelas são fabricadas permite a tolerância máxima, para o diâmetro de 0,496cm a 0,508cm; se isso não se verificar, as arruelas serão consideradas defeituosas. Determinar a percentagem de arruelas defeituosas produzidas pela máquina, admitindo-se que os diâmetros são distribuídos normalmente.

**Curva normal reduzida**
- $\mu = 0$
- $\sigma = 1$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

58

## Exercício Resolvido




59

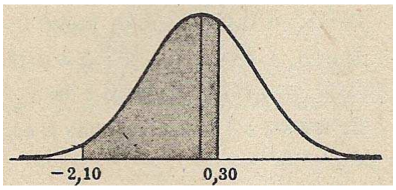
## Exercício

O peso médio de 500 estudantes do sexo masculino, de uma determinada universidade, é 75,5kg e o desvio padrão é 7,5kg. Admitindo-se que os pesos estão distribuídos normalmente, com largura de classe considerada de 0,5kg, determinar quantos estudantes pesam:

a) Entre 60,0kg e 77,5kg;
b) Mais do que 92,5kg;
c) Menos do que 64,0kg;
d) 64,0kg;
e) 64,0kg ou menos;

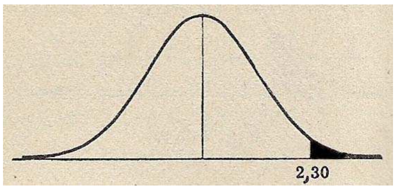
60

## Exercício Resolvido



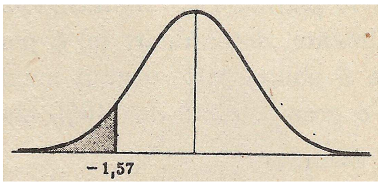

61

## Exercício Resolvido



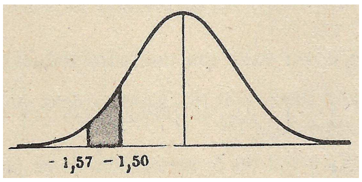

62

## Exercício Resolvido



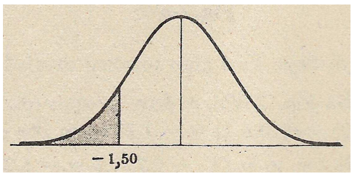

63

## Exercício Resolvido




64

## Exercício Resolvido




65

## Exercício

Uma variável aleatória contínua X, que pode assumir somente valores compreendidos entre 2 e 8, inclusive, tem uma função de densidade de probabilidade dada por a*(X+3), em que a é uma constante.

a) Calcular o valor de a;
b) Determinar Prob{3<X<5}
c) Determinar Prob{X≥4}
d) Determinar Prob{|X-5|<0,5}

66

## Exercício Resolvido

a) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x).dx$

b) Prob{3<X<5} =



## Exercício Resolvido

c) Prob{X≥4} = $\int_4^8 a * (X + 3) * dx$

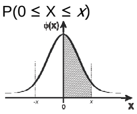
d) Prob{|X-5|<0.5} = Prob{4,5<X<5,5}



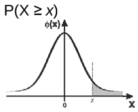
## Exercício Resolvido

Usando a tabela de distribuição normal reduzida, determinar *x* de tal forma que:

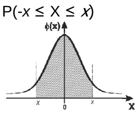
a) P(0 ≤ X ≤ *x*)



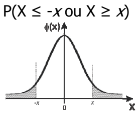

d) P(X ≥ *x*)



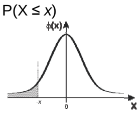

b) P(-*x* ≤ X ≤ *x*)




e) P(X ≤ -*x* ou X ≥ *x*)



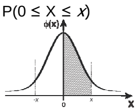

c) P(X ≤ *x*)



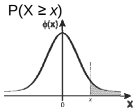

Elaborar uma tabela com 19 linhas contendo todas as probabilidades de 5% a 95%, em incrementos de 5%.

## Exercício Resolvido

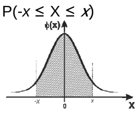
a) P(0 ≤ X ≤ *x*)



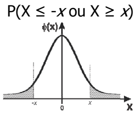
d) P(X ≥ *x*)



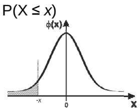
b) P(-*x* ≤ X ≤ *x*)



e) P(X ≤ -*x* ou X ≥ *x*)



c) P(X ≤ *x*)

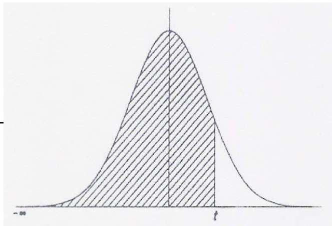


70

## Distribuições

Função de distribuição normal (Gauss)

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$



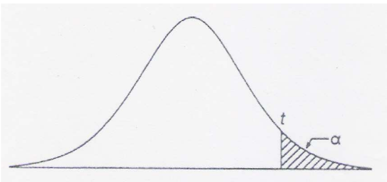
71

## Distribuições

Função de distribuição t (Student)

É usada para comparar a média da população **μ** com a média da amostra ***M*** com base no número de graus de liberdade ***v*** da amostra. Esta distribuição é indicada quando a amostra é menor do que 30 (pequenas amostras). Assim ela é muito importante para analisar dados de levantamentos.

$$t = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}}$$

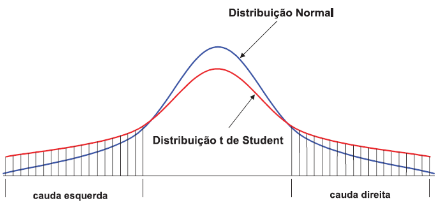



72

## Distribuições

### Função de distribuição t (Student)

Para pequenas amostras a distribuição normal apresenta valores menos precisos.
A principal diferença entre a distribuição normal e a t de Student é que esta tem mais área nas caudas.



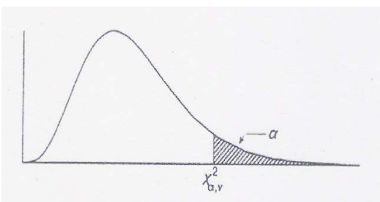

73

## Distribuições

### Função de distribuição Chi-Quadrado $\chi^2$

Compara a relação entre a variância da amostra **s²** e a variância da população **μ** com base no número de redundâncias ou graus de liberdade ***v*** da amostra.

$$\chi^2 = \frac{\nu . s^2}{\sigma^2}$$




74

## Distribuições

### Função de distribuição Chi-Quadrado $\chi^2$

A distribuição Chi-Quadrado é usada nas amostragens estatísticas para determinar o limite (superior e/ou inferior) no qual a variância da população pode ser esperada a ocorrer com base em:

a) Alguma porcentagem de probabilidade especificada;
b) A variância da amostra;
c) O número de graus de liberdade da amostra.

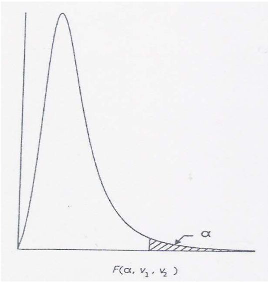
75

## Distribuições

### Função de distribuição F (Snedecor)

Esta distribuição é usada quando se quer comparar a variância de duas amostras.

$$F = \frac{\chi_1^2 / \nu_1}{\chi_2^2 / \nu_2}$$




76

## Estimativa de Parâmetros (Estimação)

A estimativa de um parâmetro populacional, dada por um número único, é denominada **estimativa por pontos**.

A estimativa de um parâmetro populacional, dada por dois números, entre os quais pode-se considerar que ele esteja situado, é denominado **estimativa por intervalos**.

As estimativas por intervalos indicam sua precisão e são, portanto, preferíveis às estimativas por pontos.

Exemplo: Dizendo-se que uma distância foi observada com 5,28m, está se apresentando uma estimativa por pontos. Se, por outro lado, se disser que a distância mede 5,28±0,03m, isto é, que ela está compreendida entre 5,25 e 5,31m, dentro de uma certa probabilidade, apresenta-se uma estimativa por intervalos.

77

## Exercícios

Um ângulo foi medido dez vezes, conforme a tabela. Calcule as estimativas pontual e por intervalo.

ESTIMATIVA PONTUAL

a) Média

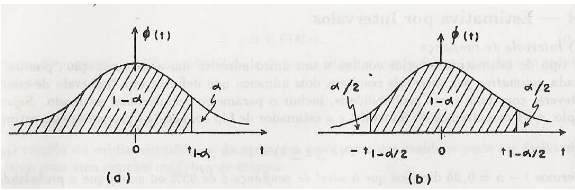
b) Erro Médio Quadrático de uma observação isolada

c) Erro Médio Quadrático da Média

| Observação | Ângulo ($a_i$) |
|---|---|
| 1 | 120° 31' 40,1" |
| 2 | 120° 31' 41,2" |
| 3 | 120° 31' 40,8" |
| 4 | 120° 31' 42,1" |
| 5 | 120° 31' 42,9" |
| 6 | 120° 31' 42,4" |
| 7 | 120° 31' 43,0" |
| 8 | 120° 31' 40,7" |
| 9 | 120° 31' 41,9" |
| 10 | 120° 31' 41,5" |

78

## Exercícios




Teste unilateral

Teste bilateral

79

## Exercícios

O **nível de significância** é representado pela letra grega α (usualmente expresso em porcentagem α*100%). Indica a **probabilidade de erro**.

O **nível de confiança** é o complemento do nível de significância (1- α)*100%, e indica a **probabilidade de certeza** nas inferências estatísticas.

80

## Exercícios

ESTIMATIVA POR INTERVALO

a) Intervalo de confiança para a média (em função do desvio padrão)

$$P[\bar{x} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2} \le \mu \le \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}] = 1 - \alpha$$

**Desvio padrão da média**

81

## Exercícios

ESTIMATIVA POR INTERVALO

a) Intervalo de confiança para a média (em função do desvio padrão)

$$P[\bar{x} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}] = 1 - \alpha$$

82

## Exercícios

ESTIMATIVA POR INTERVALO

b) Intervalo de confiança para a variância

Graus de liberdade

Cauda superior

$$P[\frac{\hat{\sigma}^2 (n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\hat{\sigma}^2 (n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}}] = 1 - \alpha$$

Cauda inferior

83

## Exercícios

ESTIMATIVA POR INTERVALO

b) Intervalo de confiança para a variância

$$P[\frac{\hat{\sigma}^2 (n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\hat{\sigma}^2 (n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}}] = 1 - \alpha$$

84

## Exercícios

Um ângulo foi medido em quatro etapas. Tomando pesos proporcionais ao número de observações, estimar o valor do ângulo e sua precisão.

| Ângulo | Observações | Peso |
|---|---|---|
| 80° 50′ 12″ | 6 | 2 |
| 80° 50′ 14″ | 3 | 1 |
| 80° 50′ 12″ | 9 | 3 |
| 80° 50′ 18″ | 6 | 2 |

ESTIMATIVA PONTUAL

a) Média ponderada

b) Erro Médio Quadrático de uma observação isolada

$$m = \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\Sigma(p_i v_i^2)}{n-1}} =$$

c) Erro Médio Quadrático da Média Ponderada

$$m_{\bar{x}} = \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\Sigma p_i}}$$

85

## Exercícios

ESTIMATIVA POR INTERVALO

a) Intervalo de confiança para a média ponderada

$$P[\bar{x} - \hat{\sigma}_{\bar{x}} t_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{x} + \hat{\sigma}_{\bar{x}} t_{1-\alpha/2}] = 1 - \alpha$$

86

## Exercícios

ESTIMATIVA POR INTERVALO

b) Intervalo de confiança para a variância

$$P[\frac{\sum p_i v_i^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum p_i v_i^2}{\chi^2_{\alpha/2}}] = 1 - \alpha$$

87

Estatística

**Esperança Matemática de uma v.a.**

Define-se "valor esperado", "valor médio", "expectância", "esperança matemática", ou simplesmente esperança de uma v.a. contínua X por

$$E\{X\} = \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x.\varphi(x).dx$$

De maneira análoga define-se a esperança de uma função de v.a. f(X)

$$E\{f(X)\} = \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X).\varphi(x).dx$$

Esperança matemática de uma v.a. discreta

$$E\{X\} = \sum_{i=1}^{n} x_i . p(x_i)$$

88

Estatística

Se $n \to \infty$ e $f_i \to p(x_i)$ ➔ $\bar{x} \to E\{X\}$

**Propriedades da esperança matemática:**

a) Sendo C e C' constantes
E{C} = C;
E{CX} = CE{X};
E{C+C'X} = C+C'E{X}

b) E{X+Y+...+Z} = E{X} + E{Y} + ... + E{Z}
E{CX+C'Y} = CE{X} + C'E{Y}

c) E{XY} = E{X} . E{Y} +cov(XY)

d) E{E{X}} = E{X}

e) $E\{X^2\} \neq (E\{X\})^2$

89

Estatística

**Momento de ordem *r* de uma v.a.**
em relação à sua esperança matemática (momento centrado) é definido como:

$$M^r = E\{(X-\mu_x)^r\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_x)^r.\Phi(x).dx$$

Tem particular importância o momento de segunda ordem ou VARIÂNCIA (r = 2)

$$\text{var}(X) = \sigma^2 = E\{(X-\mu_x)^2\} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_x)^2.\Phi(x).dx & \text{(v.a.c.)} \\ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i-\mu_x)^2.p(x_i) & \text{(v.a.d.)} \end{cases}$$

90

## Exercício

1) Se um homem adquirir um bilhete de loteria, poderá ganhar um primeiro prêmio de R$5000,00 ou um segundo de R$2000,00, com as probabilidades de 0,001 e de 0,003. Qual será o preço justo a pagar pelo bilhete?

2) Em uma certa especulação comercial, um homem pode ter um lucro de R$3000,00, com a probabilidade de 0,6, ou um prejuízo de R$1000,00, com a probabilidade de 0,4. determinar sua esperança.

3) Qual é o preço justo a pagar para entrar em um jogo no qual se pode ganhar R$25,00 com probabilidade de 0,2 e R$10,00 com probabilidade de 0,4?

4) Quanto deveria ser o valor do premio da megasena de forma que o preço justo a pagar para um jogo simples na MegaSena (6 números) seja igual ao valor de aposta = R$2,50? Probabilidade de acerto = 1/50063860

91

## Exercícios

| Probabilidade (%) | Fator de Sigma |
|---|---|
| 50 | 0,6745 |
| 90 | 1,645 |
| 95 | 1,960 |
| 99 | 2,576 |
| 99,7 | 2,968 |
| 99,9 | 3,29 |

Um observador realizou diversas medições de um objeto (distribuição normal) obtendo:
L(01:05) = [212.22, 212.25, 212.23, 212.15, 212.23];
L(06:10) = [212.11, 212.29, 212.34, 212.22, 212.24];
L(11:15) = [212.19, 212.25, 212.27, 212.20, 212.25];
Verifique se existe alguma observação que possa ser rejeitada por estar fora do nível de exatidão de 95,0%.

92

## MVC

### Variável Aleatória Bidimensional

Seja X o resultado de um experimento e Y de um segundo experimento, ambos com variância própria.

$$\sigma_X^2 = E\{(X-\mu_X)^2\} \qquad \sigma_Y^2 = E\{(Y-\mu_Y)^2\}$$

Podemos agora definir a covariância $\sigma_{XY}$ da v.a. bidimensional para exprimir a correlação entre as duas componentes, ou seja, o grau de dependência entre as mesmas:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sigma_{xy} = E\{(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\}$$

ou $$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int (x-\mu_x).(y-\mu_y).\phi(x,y).dx.dy$$

93

## MVC

Desenvolvendo a equação $\sigma_{xy} = E\{(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\}$

$$\sigma_{xy} = E\{XY\} + \mu_x\mu_y - \mu_x E\{Y\} - \mu_y E\{X\}$$
$$\sigma_{xy} = E\{XY\} + \mu_x\mu_y - \mu_x\mu_y - \mu_y\mu_x$$
$$\sigma_{xy} = E\{XY\} - \mu_x\mu_y$$
$$\sigma_{xy} = E\{XY\} - E\{X\}.E\{Y\}$$

**Quando as componentes são estatísticamente independentes**

$\phi(XY) = \phi(X).\phi(Y)$ ➔ E{XY} = E{X}.E{Y}

Quando as componentes X e Y são estatísticamente independentes a **covariância** é nula, sem que a recíproca seja necessariamente verdadeira.

$$\sigma_{xy} = 0$$

94

## MVC

### Variável Aleatória n-Dimensional

Seja X = [$x_1$ $x_2$ ... $X_n$]$^T$ com cada $x_i$ representando agora uma v.a. unidimensional.

A esperança matemática da variável n-dimensional ou, em outras palavras, o vetor esperado E{X} da distribuição n-dimensional, escreve-se:

$$U_x = E\{X\} = E\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} E\{x_1\} \\ E\{x_2\} \\ \vdots \\ E\{x_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

Cada componente $x_i$ de X é uma v.a. unidimensional de variância:

$$\sigma_i^2 = E\{(x_i - \mu_i)^2\}$$

95

## MVC

### Variável Aleatória n-Dimensional

Temos assim *n* variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_n^2$ (de cada uma das componentes) e n*(n-1) covariâncias entre os pares de componentes de índices diferentes (i≠j)

$$\operatorname{cov}(x_i, x_j) = \sigma_{ij} = E\{(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\}$$
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

96

## MVC

### Matriz Variância-Covariância (MVC)

As variâncias $\sigma_i^2$ e as covariâncias $\sigma_{ij}$ (i≠j) das componentes de uma variável n-dimensional X podem ser dispostas de maneira a formar uma matriz quadrada (n x n) que é indicada por

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

A matriz acima, simétrica, recebe o nome de matriz variância-covariância (MVC) ou simplesmente matriz covariância (pois a variância é um caso particular da covariância para i=j).
No caso das componentes do vetor X serem independentes entre si as covariâncias serão nulas e a MVC degenera numa matriz diagonal.

97

## MVC

Desenvolvendo a expressão matricial $(X - U_x)(X - U_x)^T$

$$\begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ x_n - \mu_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 & x_2 - \mu_2 & \cdots & x_n - \mu_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (x_1-\mu_1)(x_1-\mu_1) & (x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) & \cdots & (x_1-\mu_1)(x_n-\mu_n) \\ (x_2-\mu_2)(x_1-\mu_1) & (x_2-\mu_2)(x_2-\mu_2) & \cdots & (x_2-\mu_2)(x_n-\mu_n) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ (x_n-\mu_n)(x_1-\mu_1) & (x_n-\mu_n)(x_2-\mu_2) & \cdots & (x_n-\mu_n)(x_n-\mu_n) \end{bmatrix}$$

o que nos permite escrever

$$\Sigma_X = E\{(X - U_x)(X - U_x)^T\}$$

98

## MVC

Obs.: Sempre que as variâncias da v.a. forem finitas a correspondente MVC será **positiva semidefinida**, isto é

$$X^T.(MVC).X \geq 0$$ para todos os vetores $X$ n X 1

Propriedades de matriz positiva semidefinida:

- Autovalores não negativos (≥ 0)
- Elementos diagonais não negativos (≥ 0)
- Matriz simétrica

99

## MVC

As seguintes matrizes **NÃO** podem ser matrizes de variância e covariância

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Covariância é uma medida do grau de correlação existente entre duas componentes quaisquer de uma função n-dimensional.

100

## MVC

### Coeficiente de Correlação Linear

Chama-se **coeficiente de correlação linear** o coeficiente (adimensional) que descreve a dependência linear entre as duas componentes da v.a. bidimensional.

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y}$$

Demonstra-se que $-1 \le \rho_{xy} \le +1$

101

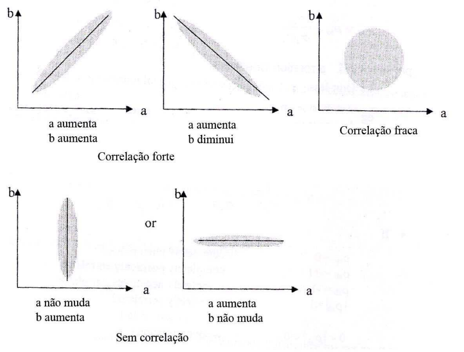
## MVC

$|\rho_{xy}| = 1$ Podemos afirmar que há uma perfeita relação linear entre X e Y ou, em outras palavras, que Y é uma função linear de X. Ver figuras (a) e (b).

$\rho_{xy} = 0$ Dizemos que as variáveis "não são correlacionadas" (X e Y não tendem a variar juntas (figura (c)), mas isso não significa necessariamente que as componentes sejam independentes estatísticamente.

102

## MVC




103

## Matriz dos Coeficientes de Correlação

A partir da MVC pode-se calcular a **matriz dos coeficientes de correlação**

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i . \sigma_j}$$

104

## MVC – Correlação estatística

$$\sigma_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

$$\sigma_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}}$$

105

## Exercícios

Implementar uma rotina (function) em FreeMat que calcule a Matriz dos Coeficientes de Correlação, a partir da MVC.

function [saida] = nome (entrada)

```
function [CoefCor] = coefcor(mvc);
	[Lmax,Cmax] = size(mvc);
	for L = 1:Lmax
		for C = 1:Cmax
			if (L==C)
				CoefCor(L,C) = 1;
			else
				CoefCor(L,C) = mvc(L,C)/sqrt(mvc(L,L)*mvc(C,C));
			end;
		end;
	end;
```

106

## Exercícios

Dois estudantes discutem sobre quem realiza a melhor medição de um ângulo. Para resolver a disputa, ambos concordam em medir um determinado ângulo quinze vezes. Os resultados das observações são: (Extraído de GHILANI, C. D. Adjustment Computations – Spatial Data Analysis. John Wiley & Sons, Inc, New Jersey, 2010. Fifth ed, pp 31)

| **Aluno A** | | | **Aluno B** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 108°26′19″ | 108°26′11″ | 108°26′27″ | 108°26′25″ | 108°26′28″ | 108°26′21″ |
| 108°26′20″ | 108°26′16″ | 108°26′18″ | 108°26′24″ | 108°26′21″ | 108°26′23″ |
| 108°26′30″ | 108°26′23″ | 108°26′23″ | 108°26′17″ | 108°26′23″ | 108°26′22″ |
| 108°26′18″ | 108°26′22″ | 108°26′20″ | 108°26′23″ | 108°26′19″ | 108°26′27″ |
| 108°26′14″ | 108°26′22″ | 108°26′20″ | 108°26′24″ | 108°26′19″ | 108°26′24″ |

107

## Exercícios

1) Calcular a média, mediana, desvio padrão, variância, desvio padrão da média:
   a) [6, 2, 4, 5, 3];
   b) [6, 4, 5, 3, 2, 5];
   c) [5, 7, 3, 6, 2, 9];
   d) [8, 4, 3, 6, 5, 7, 2];

2) Um operador executa uma determinada atividade em tempo médio de 12 minutos e desvio padrão de 1,5 minutos, com distribuição normal. Qual é a probabilidade de que este operador leve entre 10 minutos e 15 minutos para executar a atividade?

108

## Exercícios

3) Suponha que uma fábrica tenha estabelecido que a vida média dos pneus para automóveis, de sua fabricação, é de 35.000km rodados, com um desvio padrão de 3.000km. Suponha ainda que o tempo de duração dos pneus seja uma v.a. normalmente distribuída.

a) Se a fábrica oferecer uma garantia de 30.000km, em condições normais de uso do veículo, qual é a probabilidade de que um pneu vendido tenha de ser substituído?

b) Qual quilometragem a fábrica deve oferecer como garantia, para que nenhum pneu vendido tenha de ser substituído?

c) A fábrica está interessada em melhorar a qualidade dos pneus e, para isso, está estudando a possibilidade de se aumentar a duração média dos pneus. Qual deveria ser a duração média para que, com uma garantia de 30.000km, somente 1% dos pneus vendidos tenham de ser trocados?

109

## Exercícios

4) Um fabricante de refrigerantes vende um de seus produtos engarrafados em vasilhames de 1 litro. Para engarrafar este produto é utilizada uma máquina que, calibrada, permite obter o volume desejado, segundo uma distribuição normal, com um desvio padrão de 30ml.

a) Se o Órgão Fiscalizador do Governo (OFG) faz a exigência de que não mais de 8% das garrafas tenham um volume menor do que o nominal, em quanto deve ser regulada a máquina para que o fabricante não seja autuado?

b) Se a máquina for calibrada para colocar 1,035ml de líquido no vasilhame, qual a porcentagem de vasilhames que não estarão atendendo às especificações do OFG?

c) Para qual valor deve ser ajustada a precisão da máquina, para que estando calibrada em 1.350ml, as especificações do OFG sejam atendidas?

110

## Exercícios

5) Foram observados os tempos de duração do intervalo para o “cafezinho”, para uma amostra de 20 empregados de uma grande empresa (1000 funcionários), obtendo-se os seguintes resultados, em minutos:

[15.79 15.75 18.11 14.54 10.06 17.32 18.52 16.11 13.59 18.63]

[16.27 13.75 15.16 14.75 13.03 18.47 12.14 14.67 16.52 12.47]

Supondo a variável tempo distribuída segundo uma Normal:

a) Encontre a média e a variabilidade estimadas do tempo de duração do intervalo para o “cafezinho” dos funcionários desta empresa. Encontre, ainda, intervalos de 90% de confiança para a média e a variância.

b) Quantos funcionários da empresa terão o tempo de duração do intervalo para o “cafezinho” maior que 20 minutos?

111

## Exercícios

6) Um fabricante de lâmpadas afirma que o tempo de duração do seu produto, em horas, é distribuído aproximadamente normal. Se uma amostra aleatória de 30 lâmpadas teve tempo de vida médio de 780 horas, com desvio padrão de 40 horas, encontre um intervalo de 95% de confiança para o tempo médio de vida das lâmpadas desta fábrica.

7) Um aluno de engenharia cartográfica realizou um levantamento fazendo observações de duas v.a., obtendo os seguintes resultados:

x = [1.559   1.577   1.513   1.565   1.535]

y = [8.026   8.070   8.118   8.130   8.154]

Deseja-se saber se existe correlação (estatística) entre as variáveis x e y, e o valor do coeficiente de correlação linear.

112

## Exercícios

1) Calcular a média, mediana, desvio padrão, variância, desvio padrão da média:

a) [6, 2, 4, 5, 3];

b) [6, 4, 5, 3, 2, 5];

c) [5, 7, 3, 6, 2, 9];

d) [8, 4, 3, 6, 5, 7, 2];

113

## Exercícios

2) Um operador executa uma determinada atividade em tempo médio de 12 minutos e desvio padrão de 1,5 minutos, com distribuição normal. Qual é a probabilidade de que este operador leve entre 10 minutos e 15 minutos para executar a atividade?

114

## Exercícios

3) Suponha que uma fábrica tenha estabelecido que a vida média dos pneus para automóveis, de sua fabricação, é de 35.000km rodados, com um desvio padrão de 3.000km. Suponha ainda que o tempo de duração dos pneus seja uma v.a. normalmente distribuída.

a) Se a fábrica oferecer uma garantia de 30.000km, em condições normais de uso do veículo, qual é a probabilidade de que um pneu vendido tenha de ser substituído?

b) Qual quilometragem a fábrica deve oferecer como garantia, para que nenhum pneu vendido tenha de ser substituído?

c) A fábrica está interessada em melhorar a qualidade dos pneus e, para isso, está estudando a possibilidade de se aumentar a duração média dos pneus. Qual deveria ser a duração média para que, com uma garantia de 30.000km, somente 1% dos pneus vendidos tenham de ser trocados?

115

## Exercícios

116

## Exercícios

4) Um fabricante de refrigerantes vende um de seus produtos engarrafados em vasilhames de 1 litro. Para engarrafar este produto é utilizada uma máquina que, calibrada, permite obter o volume desejado, segundo uma distribuição normal, com um desvio padrão de 30ml.

a) Se o Órgão Fiscalizador do Governo (OFG) faz a exigência de que não mais de 8% das garrafas tenham um volume menor do que o nominal, em quanto deve ser regulada a máquina para que o fabricante não seja autuado?

b) Se a máquina for calibrada para colocar 1.035ml de líquido no vasilhame, qual a porcentagem de vasilhames que não estarão atendendo às especificações do OFG?

c) Para qual valor deve ser ajustada a precisão da máquina, para que estando calibrada em 1.035ml, as especificações do OFG sejam atendidas?

117

## Exercícios

118

## Exercícios

5) Foram observados os tempos de duração do intervalo para o "cafezinho", para uma amostra de 20 empregados de uma grande empresa (1000 funcionários), obtendo-se os seguintes resultados, em minutos:

[15.79 15.75 18.11 14.54 10.06 17.32 18.52 16.11 13.59 18.63]

[16.27 13.75 15.16 14.75 13.03 18.47 12.14 14.67 16.52 12.47]

Supondo o tempo v.a. em conformidade com a distribuição Normal para pequenas amostras (t-Student)

a) Encontre a média e a variabilidade estimadas do tempo de duração do intervalo para o "cafezinho" dos funcionários desta empresa. Encontre, ainda, intervalos de 90% de confiança para a média e a variância.

b) Nestas condições, quantos funcionários da empresa terão o tempo de duração do intervalo para o "cafezinho" maior que 20 minutos?

119

## Exercícios

120

## Exercícios

5a)

Graus de liberdade

Cauda superior

$$P[\frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}}] = 1-\alpha$$

Cauda inferior

121

## Exercícios

122

## Exercícios

6) Um fabricante de lâmpadas afirma que o tempo de duração do seu produto, em horas, é distribuído aproximadamente normal. Se uma amostra aleatória de 30 lâmpadas teve tempo de vida médio de 780 horas, com desvio padrão de 40 horas, encontre um intervalo de 95% de confiança para o tempo médio de vida das lâmpadas desta fábrica.

7) Um aluno de engenharia cartográfica realizou um levantamento fazendo observações de duas v.a., obtendo os seguintes resultados:

x = [1.559 1.577 1.513 1.565 1.535]

y = [8.026 8.070 8.118 8.130 8.154]

Deseja-se saber se existe correlação (estatística) entre as variáveis x e y, e o valor do coeficiente de correlação linear.

123

## Exercícios

7) Um aluno de engenharia cartográfica realizou um levantamento fazendo observações de duas v.a., obtendo os seguintes resultados:

x = [1.513 1.535 1.559 1.565 1.577]

y = [8.026 8.070 8.118 8.130 8.154]

Deseja-se saber se existe correlação (estatística) entre as variáveis x e y, e o valor do coeficiente de correlação linear.

$$\sigma_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

124

## Exercícios

8) Duas variáveis amostrais X e Y assumem os valores $X_1 = 2$, $X_2 = 5$, $X_3 = 4$, $X_4 = 8$, e $Y_1 = 3$, $Y_2 = 7$, $Y_3 = 2$, $Y_4 = 6$. Calcular:

a) MVC(X*Y);
b) MVC(X)*MVC(Y);
c) Média, mediana e desvio padrão de X;
d) Média, mediana e desvio padrão de Y.

125

## Exercícios

9) Dada a MVC de três variáveis aleatórias [3,2,1;2,5,2;1,2,4] (sintaxe Freemat), determinar quais duas variáveis apresentam a maior correlação entre si, e qual o porcentual.

(ver função de cálculo do coeficiente de correlação slide 101)

126

## Exercícios

10) Uma distância foi medida cinco vezes, conforme a tabela. Calcule as estimativas pontual e por intervalo de confiança (95%).

| Observação | Distância (m) |
|---|---|
| 1 | 55,88 |
| 2 | 56,06 |
| 3 | 55,83 |
| 4 | 55,95 |
| 5 | 56,02 |

127

## Exercícios

128

## Exercícios

10a)

Graus de liberdade

Cauda superior

$$P\left[\frac{\hat{\sigma}^2 (n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\hat{\sigma}^2 (n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}}\right] = 1-\alpha$$

Cauda inferior

129

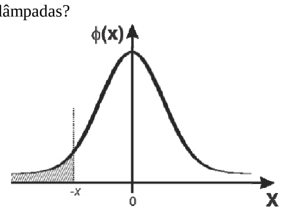
## Exercícios

11) Para se ajustar a uma máquina, a correia deve ter entre 0.98 e 1,02m de comprimento. Tendo em vista o processo de fabricação, o comprimento dessas correias pode ser considerado como uma variável aleatória com distribuição normal de média 100,3cm e desvio padrão 0,8cm. Pergunta-se qual a probabilidade de uma correia, escolhida ao acaso, poder ser usada na máquina?

130

## Exercícios

12) Um fabricante de lâmpadas afirma que o tempo de duração do seu produto, em horas, é distribuído aproximadamente normal. Se uma amostra aleatória de 100 lâmpadas teve tempo de vida médio de 780 horas, com desvio padrão de 40 horas, qual o maior tempo médio de vida das lâmpadas que o fabricante pode oferecer garantia sabendo-se que ele está disposto a trocar até 5% das lâmpadas?




131

## Exercícios

13) Uma turma de 50 alunos fez uma prova em tempo médio de 1,5horas, com desvio-padrão de 15 minutos. Pergunta-se:

a) Quantos alunos terminarão a prova em 1 hora 1,25 hora, 1,5 hora, 1,75 hora e 2,0 hora?

132