UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA
DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

AJUSTAMENTO I – GA106

Prof. Alvaro Muriel Lima Machado

Elipse dos Erros

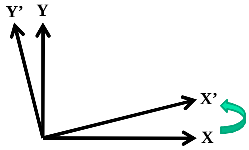
Dada uma MVC referente a coordenadas bidimensionais de um ponto

$$\rightarrow \quad MVC = \Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

verifica-se que as precisões das coordenadas acham-se vinculadas às direções dos eixos.

Pode-se efetuar uma rotação t dos eixos:

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$



Elipse dos Erros

A correspondente MVC pode ser obtida por propagação: $\Sigma_{x'y'} = D\,\Sigma_{xy}\,D^T$

$$\Sigma_{x'y'} = \begin{bmatrix} \cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & \cos(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'}^2 & \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{x'y'} & \sigma_{y'}^2 \end{bmatrix}$$

Segue-se que:

$$\sigma_{x'}^2 = \sigma_x^2 \cos^2(t) + \sigma_y^2 sen^2(t) + 2\sigma_{xy} sen(t)\cos(t)$$
$$\sigma_{y'}^2 = \sigma_x^2 sen^2(t) + \sigma_y^2 \cos^2(t) - 2\sigma_{xy} sen(t)\cos(t)$$
$$\sigma_{x'y'} = -(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) sen(t)\cos(t) + \sigma_{xy}(\cos^2(t) - sen^2(t))$$

Elipse dos Erros

Derivando em relação a t, buscando máximos e mínimos, obtém-se:

$$\sigma_{x'}^2 = \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \sqrt{4\sigma_{xy}^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}}{2}$$

$\boxed{tg(2t) = \dfrac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}}$ ➔ Esta expressão admite duas raízes: ***t*** e ***t+90°***

Fazendo-se $\boxed{M^2 = 4\sigma_{xy}^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}$ na primeira expressão

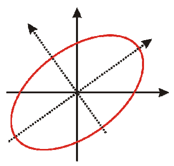
➔ $\boxed{\sigma^2 = 0{,}5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm M)}$ **máximo** / **mínimo**

4

Elipse dos Erros

Propriedades:

a) Os desvios padrões máximo e mínimo correspondem aos semi-eixos maior e menor de uma elipse (elipse dos erros);



b) A soma das variâncias segundo duas direções ortogonais é constante e independe da rotação dos eixos;

$$\max(\sigma^2) + \min(\sigma^2) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \text{constante}$$

5

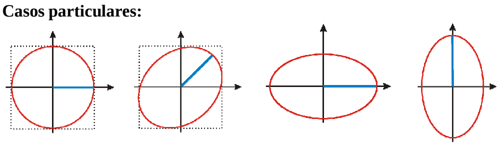
Elipse dos Erros

$\boxed{M^2 = 4\sigma_{xy}^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}$

$\boxed{\sigma^2 = 0{,}5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm M)}$

$\boxed{tg(2t) = \dfrac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}}$

Casos particulares:



$\sigma_x = \sigma_y$	$\sigma_x = \sigma_y$	$\sigma_x > \sigma_y$	$\sigma_x < \sigma_y$
$\sigma_{xy} = 0$	$\sigma_{xy} \neq 0$	$\sigma_{xy} = 0$	$\sigma_{xy} = 0$
$t = 0^\circ$	$t = 45^\circ$	$t = 0^\circ$	$t = 90^\circ$

6

Elipse dos Erros

$$M^2 = 4\sigma_{xy}^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2$$

$$\sigma^2 = 0{,}5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm M)$$

$$tg(2t) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

Numerador	Denominador	Quadrante 2t
+	+	1
+	-	2
-	-	3
-	+	4

$$sen(2t) = \frac{2\sigma_{xy}}{M}$$

$$\cos(2t) = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{M}$$

7

Elipse dos Erros

$$M^2 = 4\sigma_{xy}^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2$$

$$\sigma^2 = 0{,}5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm M)$$

$$tg(2t) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

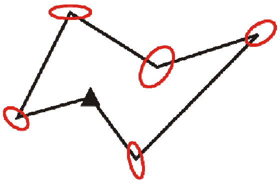
σ_{xy}	$\sigma_x^2 - \sigma_y^2$	Quadrante 2t
+	+	1
+	-	2
-	-	3
-	+	4

$$sen(2t) = \frac{2\sigma_{xy}}{M}$$

$$\cos(2t) = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{M}$$

8

Elipse dos Erros



Representação gráfica da precisão das coordenadas de uma poligonal

Elipse de confiança (distribuição qui-quadrado)

Elipse relativa

Elipsóide

9

Elipse dos Erros

Dada a MVC das coordenadas de um ponto, calcular as dimensões e a orientação da elipse dos erros.

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} 0{,}826 & 0{,}161 \\ 0{,}161 & 0{,}178 \end{bmatrix}$$

a) Cálculo de M

$$M^2 = 4\sigma_{xy}^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2$$

b) Variâncias máxima e mínima

$$\max(\sigma) = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + M}{2}$$

$$\min(\sigma) = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - M}{2}$$

c) Ângulo $tg(2t) = \dfrac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$

10

Elipse dos Erros

Dada a MVC das coordenadas de um ponto, calcular as dimensões e a orientação da elipse dos erros.

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} 0{,}5963 & 0{,}2403 \\ 0{,}2403 & 1{,}0683 \end{bmatrix} * 10^{-2}$$

a) Cálculo de M

$$M^2 = 4\sigma_{xy}^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2$$

b) Variâncias máxima e mínima

$$\max(\sigma) = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + M}{2}$$

$$\min(\sigma) = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - M}{2}$$

c) Ângulo $tg(2t) = \dfrac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$

11

Elipse dos Erros

Dada a MVC das coordenadas de um ponto, calcular as dimensões e a orientação da elipse dos erros.

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} 3{,}76330 & -1{,}29788 \\ -1{,}29788 & 6{,}14226 \end{bmatrix}$$

a) Cálculo de M

$$M^2 = 4\sigma_{xy}^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2$$

b) Variâncias máxima e mínima

$$\max(\sigma) = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + M}{2}$$

$$\min(\sigma) = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - M}{2}$$

c) Ângulo $tg(2t) = \dfrac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$

12

Elipse dos Erros

Dada a MVC das coordenadas de um ponto, calcular as dimensões e a orientação da elipse dos erros.

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} 4{,}230 & -1{,}788 \\ -1{,}788 & 2{,}724 \end{bmatrix}$$

a) Cálculo de M

$$M^2 = 4\sigma_{xy}^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2$$

b) Variâncias máxima e mínima

$$\max(\sigma) = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + M}{2}$$

$$\min(\sigma) = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - M}{2}$$

c) Ângulo $tg(2t) = \dfrac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$

13